ESERCIZI

Le equazioni lineari in due incognite

Per ogni equazione nelle incognite x e y verifica se le coppie di numeri scritte a lato sono soluzioni.

2 $2x + 6y - 5 = 0$ $\quad (0; 1), \quad \left(1; \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}; 0\right).$ [no; sì; sì]

3 $5y + \frac{1}{2}x - 1 = -4y - \frac{1}{2}x$ $\quad (1; 0), \quad \left(2; \frac{1}{9}\right), \quad \left(2; -\frac{1}{9}\right).$ [sì; no; sì]

4 $\frac{y - x}{5} = \frac{x - y}{3}$ $\quad (0; 0), \quad (1; 2), \quad (-6; -6).$ [sì; no; sì]

Le soluzioni di un sistema

Verifica se la coppia scritta di fianco a ogni sistema è soluzione del sistema oppure no.

5 $\begin{cases} 5x - 3y = 12 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ $\quad (3; 1).$ [sì]

6 $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 6x - 9y = 2 \end{cases}$ $\quad (5; -2).$ [no]

7 $\begin{cases} 3y = x + 2 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$ $\quad (1; 1).$ [sì]

8 $\begin{cases} x + y = 2a \\ 6x + 3ay = 6a^2 \end{cases}$ $\quad (0; 2a).$ [sì]

9 La coppia $(1; -2)$ è soluzione di un solo sistema fra i seguenti. Quale?

a) $\begin{cases} \frac{y - 1}{5} = 2x + 6 \\ \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{5} \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} \frac{y + 2}{6} = x - 1 \\ \frac{1}{2}y + 1 = \frac{1 - x}{2} \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} \frac{4y - 3}{8} = \frac{1 - x}{5} \\ \frac{8y + 2}{3} = -x - 1 \end{cases}$

ASSOCIA a ogni sistema la relativa coppia soluzione.

10 $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - y = 7 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ -5x + y = -1 \end{cases}$ $\quad (0; -1), \quad (5; -2), \quad (3; 4).$

11 $\begin{cases} 2x - 6y = -1 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x - 6y = -3 \\ 4x + 9y = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x - 6y = 1 \\ 4x + 9y = -5 \end{cases}$ $\quad \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right).$

Il grado di un sistema

12 Fra i seguenti sistemi nelle incognite x e y indica quelli di primo grado.

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} 7x - \frac{1}{3}y + 1 = y \\ 4a^2x - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} 2ay + 2 = 1 - x \\ 3x + y = 1 - 2y \end{cases}$

Indica il grado di ciascuno dei seguenti sistemi.

13 a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = y + 2 \\ 4x - 3y = 2y + 2 - 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = -7 \\ x = -y^2 + 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3 - 3x^2y^2 = 0 \\ x^2y - 2 + 3xy = y \end{cases}$

14 a) $\begin{cases} y = 4x^2 - 2x + 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4xy - 8 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 6y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

15 **COMPLETA** i seguenti sistemi scrivendo un'equazione nelle incognite x e y in modo che il sistema formato dalle due equazioni abbia il grado indicato a fianco.

a) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ secondo grado b) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ primo grado

La riduzione di un sistema lineare a forma normale

ESERCIZIO GUIDA

16 Riduciamo a forma normale il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - 5 = 7y \\ 4(y - 2x) + 10x - 3 = -2 \end{cases}$$

Dobbiamo scrivere le due equazioni nella forma $ax + by = c$, in cui compaiono le due incognite a primo membro e il termine noto a secondo membro.
Eseguiamo i calcoli:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ 4y - 8x + 10x = 3 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Fra i seguenti sistemi lineari, indica quelli scritti in forma normale e riduci poi gli altri alla stessa forma.

17 a) $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 6x - y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x + 3y = 6 \\ -2x + 7y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -y + 3 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$

18 a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 8y + 7x = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x = y + 1 \\ 3x = -2y + 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 1 = 4x + 2y \end{cases}$

Riduci a forma normale i seguenti sistemi lineari.

19 $\begin{cases} 2x - 3y - 14 = 9 - 3x + y \\ x + 4y - 10 = +14 + 1 - 3x - 6y \end{cases}$

20 $\begin{cases} 9(x + y) - 8(x - y) = 19 \\ 4(x - y) + 2(3x - y) = 14 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5(x - y) - 9 = 30 - x \\ 4x - 3y = 54 - 3x \end{cases}$

22 $\begin{cases} y - \dfrac{1}{10} + x = \dfrac{1 + x}{2} - \dfrac{1}{20} \\ 2x - y + \dfrac{3}{20} = 1 + x - \dfrac{1 + 2y}{3} \end{cases}$

2. Il metodo di sostituzione

Teoria a pag. 705

RIFLETTI SULLA TEORIA

23 VERO O FALSO?

a) Nel metodo di sostituzione si ricava sempre l'incognita x dalla prima equazione. V F

b) Il metodo di sostituzione non si può applicare se i termini noti delle equazioni del sistema lineare sono nulli. V F

c) Dato un sistema di due equazioni in due incognite, nel metodo di sostituzione si deve sostituire l'espressione ricavata, per una delle due incognite, da una delle due equazioni nell'altra equazione, al posto della stessa incognita. V F

24 TEST Sono dati i sistemi:

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2x+1}{5} \\ 3x - 7\left(\dfrac{2x+1}{5}\right) = 5 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x - 5(3x-5) = -1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 7y = 5 \end{cases}$

A a) e b) sono equivalenti al sistema c).

B solo a) è equivalente al sistema c).

C solo b) è equivalente al sistema c).

D a) e b) sono equivalenti fra loro.

E non si può stabilire se a) o b) siano equivalenti al sistema c).

25 TEST È dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$$

Se lo si vuole risolvere con il metodo di sostituzione, risulta più semplice, dal punto di vista del calcolo:

A ricavare l'incognita x dalla prima equazione.

B ricavare l'incognita x dalla seconda equazione.

C ricavare l'incognita y dalla prima equazione.

D ricavare l'incognita y dalla seconda equazione.

E trasportare i termini noti a sinistra dell'uguale.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

26 Risolviamo il seguente sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2y - 5 = -2x - 6 + y \\ 2(x-1) = 3(1-2y) + 19 \end{cases}$$

Riduciamo il sistema a forma normale:

$$\begin{cases} 2x + 2y - y = -6 + 5 \\ 2x - 2 = 3 - 6y + 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + 6y = 22 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + 6y = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla prima equazione, perché ha il coefficiente uguale a 1, quindi il calcolo è più semplice:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione a y nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 3(-1 - 2x) = 12 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x - 3 - 6x = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ -5x = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x = -3 \end{cases}$$

Sostituiamo il valore di x nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2(-3) \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(-3; 5)$.

Risolvi con il metodo di sostituzione i seguenti sistemi.

27 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ $[(6; 3)]$

28 $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ $[(16; 5)]$

29 $\begin{cases} 5x + y = 20 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}$ $[(4; 0)]$

30 $\begin{cases} x - 6y + 5 = 3 - 7y + 10 + 2x + 2 \\ x + y = 6 - 8 \end{cases}$ $[(-6; 4)]$

31 $\begin{cases} 2x - 4 = 3y \\ 4y - 1 = 2x \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{19}{2}; 5\right)\right]$

32 $\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)\right]$

33 $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{5}{2}; -2\right)\right]$

34 $\begin{cases} 5(5x - 2) = 20x - 2(y - 3) \\ 2(x - 5) - 12y = 21(1 - y) \end{cases}$ $[(2; 3)]$

35 $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)(y + 1) = x^2 + y^2 + 3 \\ (x - 3y)(x + 3y) - x^2 + 3y = 4 - 9y^2 - 2x \end{cases}$ $\left[\left(0; \dfrac{4}{3}\right)\right]$

36 $\begin{cases} 3(x - 1) + 2(y + 1) - 6 = 5 \\ 2(x + 1) - 3(y - 1) = 0 \end{cases}$ $[(2; 3)]$

37 $\begin{cases} 8(x - y) + 6(x + y) - 96 = 144 \\ x + y = 40 \end{cases}$ $[(20; 20)]$

38 $\begin{cases} x - 2 = \dfrac{y}{3} - 1 + \dfrac{x}{2} \\ \dfrac{5x + 3y}{6} - 3 = \dfrac{2x - y}{4} + \dfrac{7}{12} \end{cases}$ $[(4; 3)]$

39 $\begin{cases} 3(x - 1) - 2(y - 1)^2 = 5 - 2y^2 \\ 6x(y - 1) + 3y(4 - 2x) = 0 \end{cases}$ $[(2; 1)]$

40 $\begin{cases} (x + 2)^2 - 3x + 2y = 9 + x^2 \\ -5x + 3(x - 3) + x - y = -6 \end{cases}$ $[(-11; 8)]$

41 $\begin{cases} \dfrac{x - 2}{5} - \dfrac{2y - 1}{3} = \dfrac{x + y}{15} \\ \dfrac{1}{3}x - 2y = 1 \end{cases}$ $[(-27; -5)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E30

42 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}(x + 1) + 4(x - y) = 3x + \dfrac{1}{3} \\ x(1 - x) + (y - 2)^2 = \dfrac{7}{3} + (y - x)(x + y) \end{cases}$

43 $\begin{cases} (y-x)[1+(y+x)]+(x+1)^2-6=-(x^2-y^2)+(x-2)(x+2) \\ 2(2x+3y)-3(x-5y)=1 \end{cases}$ $[(1;0)]$

44 $\begin{cases} x-(x-1)(1+y)=y+2+1-x-x(1+y) \\ y(1+x^2)+3x+x^2=x^2y+(1+x)^2+4y-13 \end{cases}$ $\left[\left(1;\frac{13}{3}\right)\right]$

45 $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3)-\frac{y-2x}{2}=x-1 \\ 2(x-y)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)+\frac{17}{6}=\frac{15-x}{3}-\frac{1}{6}(1-y) \end{cases}$ [indeterminato]

46 $\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1)+y-3=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x+1) \end{cases}$ $[(-1;3)]$

3. I sistemi determinati, impossibili, indeterminati

→ Teoria a pag. 706

RIFLETTI SULLA TEORIA

47 **VERO O FALSO?**

a) Se un sistema è impossibile, allora non ha soluzioni. V F

b) Un sistema è determinato quando ha una sola soluzione. V F

c) Un sistema è impossibile solo quando tutte le equazioni del sistema sono impossibili. V F

d) Il sistema $\begin{cases} \frac{1}{5}y=-2 \\ \frac{1}{3}x=-1 \end{cases}$ è indeterminato. V F

e) Il sistema $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ individua due rette coincidenti. V F

f) Se in $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ si ha $\frac{a}{b}\neq\frac{a_1}{b_1}$, allora il sistema è determinato. V F

g) I sistemi $\begin{cases} 2x-y=-2 \\ 6x-3y=4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 6x-3y=6 \end{cases}$ sono rispettivamente impossibile e indeterminato. V F

h) Se nel sistema $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ si ha $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}$, allora il sistema è impossibile. V F

i) Un sistema lineare indeterminato è rappresentato graficamente da due rette parallele. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

48 Stabiliamo se ognuno dei seguenti sistemi è determinato, indeterminato o impossibile senza risolverlo. Interpretiamo poi graficamente i sistemi.

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$

I tre sistemi sono scritti in forma normale, quindi confrontiamo in ognuno di essi i rapporti $\frac{a}{a_1}$ fra i coefficienti di x, $\frac{b}{b_1}$ fra i coefficienti di y e $\frac{c}{c_1}$ fra i termini noti.

a) $\begin{cases} 1x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ $\quad \frac{a}{a_1} = \frac{1}{3}; \quad \frac{b}{b_1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$

I rapporti tra i coefficienti di x e y sono diversi, quindi il sistema è determinato.

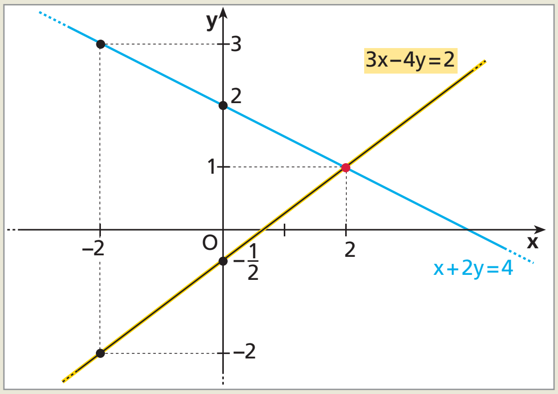
Le equazioni $x + 2y = 4$ e $3x - 4y = 2$ sono rappresentate nel piano cartesiano da due rette. Troviamo alcuni punti mediante tabelle e disegniamo le rette.

$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1

$3x - 4y = 2$

x	-2	0	2
y	-2	$-\frac{1}{2}$	1



b) $\begin{cases} 2x - 1y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ $\quad \frac{a}{a_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{b}{b_1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{c_1} = \frac{1}{2}.$

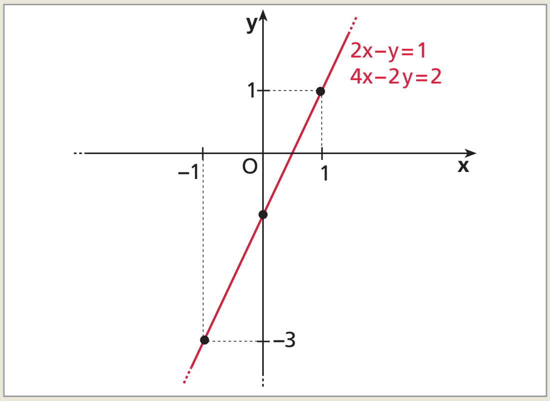
I tre rapporti sono uguali, quindi il sistema è indeterminato.
Rappresentiamo graficamente il sistema.

$2x - y = 1$

x	-1	0	1
y	-3	-1	1

$4x - 2y = 2$

x	-1	0	1
y	-3	-1	1



c) $\begin{cases} 1x - 2y = -2 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$ $\quad \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{c}{c_1} = \dfrac{-2}{-12} = \dfrac{1}{6}.$

$\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$, quindi il sistema è impossibile.

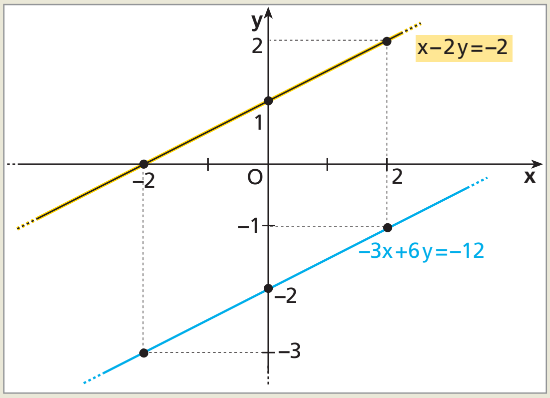
Interpretiamolo graficamente.

$x - 2y = -2$

x	-2	0	2
y	0	1	2

$-3x + 6y = -12$

x	-2	0	2
y	-3	-2	-1



Per ogni sistema stabilisci se esso è determinato, impossibile o indeterminato, senza risolverlo. Se il sistema è determinato, risolvilo con il metodo di sostituzione. Interpreta poi graficamente il sistema.

49 $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$ [indeterminato]

50 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ $\left[\text{determinato}, \left(\dfrac{1}{7}; \dfrac{2}{7}\right)\right]$

51 $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ 18x - 6y = -1 \end{cases}$ [impossibile]

52 $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$ [impossibile]

53 $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x - \dfrac{1}{3}y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

54 $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{6}y - 3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x = 1 \end{cases}$ $\left[\text{determinato}, \left(\dfrac{16}{13}; \dfrac{42}{13}\right)\right]$

55 $\begin{cases} 1 - 4y - \dfrac{1}{3}x = 0 \\ \dfrac{2}{3}x + 8y = +\dfrac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

56 Sono date le seguenti equazioni:

a) $2x - 3y + 1 = 0$;

b) $2x + 2y = 0$;

c) $-2x + 3y + 2 = 0$;

d) $4x - 6y + 2 = 0$.

Puoi costruire con due di esse un sistema impossibile? E un sistema indeterminato?

[impossibile con a) e c), c) e d); indeterminato con a) e d)]

Determina per quali valori di k i seguenti sistemi sono determinati, senza risolverli.

57 $\begin{cases} kx - y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ $\left[k \neq -\dfrac{2}{3}\right]$

58 $\begin{cases} (k+1)x - 2ky = k \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ $\left[k \neq -\dfrac{1}{5}\right]$

59 $\begin{cases} x - 3y = k \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ $[\forall\, k \in \mathbb{R}]$

60 $\begin{cases} 2kx + ky = 5 \\ (k+1)x + \left(\dfrac{k+1}{2}\right)y = -4 \end{cases}$ $[\nexists\, k \in \mathbb{R}]$

Trova per quali valori di k i seguenti sistemi sono impossibili, senza risolverli.

61 $\begin{cases} x + 2ky = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ $\left[k = -\dfrac{1}{4}\right]$

62 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6kx + 4y = 1 \end{cases}$ $[k = -2]$

63 $\begin{cases} kx - (k+3)y = 1 \\ 2x - 8y = 3 \end{cases}$ $[k = 1]$

64 $\begin{cases} 11x - 3y = k + 1 \\ 22x - 6y = -k \end{cases}$ $\left[k \neq -\dfrac{2}{3}\right]$

Trova per quali valori di a i seguenti sistemi sono indeterminati.

65 $\begin{cases} 2ax + y = -2 \\ x - 2y = +4 \end{cases}$ $\left[a = -\dfrac{1}{4}\right]$

66 $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2ax - 4y = 3 \end{cases}$ $[\nexists\, a \in \mathbb{R}]$

67 $\begin{cases} ax + ay = -3 \\ 3ax + 3y = -9 \end{cases}$ $[a = 1]$

68 $\begin{cases} -2ax + y = 5a \\ 6x - y = -15 \end{cases}$ $[a = 3]$

Sistemi e geometria analitica

COMPLETA scrivendo a fianco di ogni sistema se le rette rappresentate dalle due equazioni sono coincidenti, parallele o incidenti, *senza* risolvere il sistema.

69 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

70 $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + \dfrac{1}{2}y - 1 = 0 \end{cases}$

71 $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 4x - 12y = 4 \end{cases}$

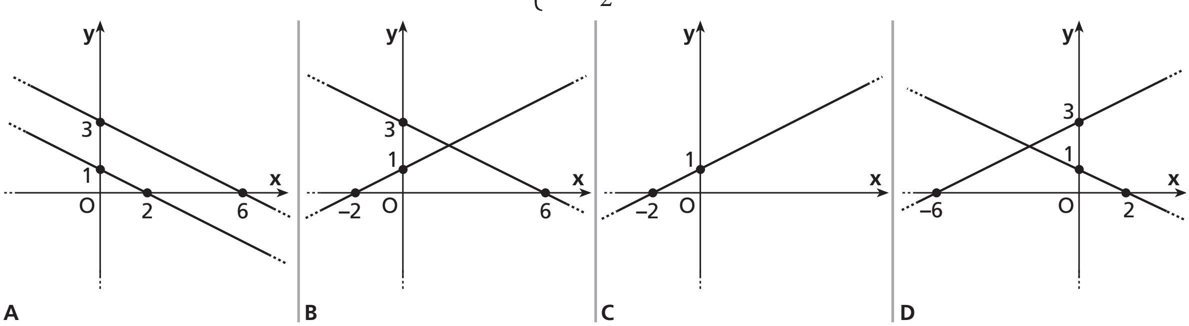
72 $\begin{cases} x = 5y + 1 \\ -2x + 10y - 4 = 0 \end{cases}$

73 $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 6x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$

74 $\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$

75 **ASSOCIA** a ogni sistema di equazioni il grafico che lo rappresenta.

1. $\begin{cases} 6 = 6y - 3x \\ x = 2y - 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ x = 6 - 2y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2y + x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ 2y = 6 - x \end{cases}$



Determina le coordinate degli eventuali punti di intersezione delle rette che hanno le seguenti equazioni.

76 $3x - y + 7 = 0$; $2x + y + 3 = 0$. $[(-2; 1)]$

77 $y = 4x - 7$; $x + y + 2 = 0$. $[(1; -3)]$

78 $2x - y + 1 = 0$; $y = 2x - 3$. [nessun punto]

79 $3x - y + 9 = 0$; $y = 2x + 6$. $[(-3; 0)]$

80 $y = 3x + 1$; $2y - 8 = 0$. $[(1; 4)]$

81 $2x - 3y - 2 = 0$; $6x - 9y - 6 = 0$. [tutti i punti]

82 $2x + y + 4 = 0$; $2y + 5 + x = 0$. $[(-1; -2)]$

83 $2x - 6y - 12 = 0$; $y = \frac{1}{3}x - 2$. [tutti i punti]

84 $y = \frac{3}{2}x - 1$; $4x + 3y - 2 = 0$. $\left[\left(\frac{10}{17}; -\frac{2}{17}\right)\right]$

85 $y = 3x - 2$; $3x - y - 1 = 0$. [nessun punto]

86 Trova le coordinate dei vertici del triangolo individuato dalle rette di equazioni $x - 3y - 13 = 0$, $4x - y - 8 = 0$, $3x + 2y - 17 = 0$ e calcolane l'area. $[(3; 4), (1; -4), (7; -2); \text{area} = 22]$

87 Trova perimetro e area del triangolo individuato dalle rette di equazione $y + 2 = 0$, $3x - 4y + - 11 = 0$, $3x + 4y - 19 = 0$, verificando che è un triangolo isoscele. [perimetro = 18; area = 12]

88 Scrivi l'equazione della retta r passante per $P(0; 4)$ e parallela alla retta $2x - y + 1 = 0$, e calcola l'area del quadrilatero limitato dalle due rette e dagli assi cartesiani. $\left[2x - y + 4 = 0; \text{area} = \frac{15}{4}\right]$

89 Date le rette $y - x = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - 4y - 3 = 0$, verifica che esse determinano un triangolo rettangolo. Calcola poi l'area del triangolo e le coordinate del circocentro D. $\left[\text{area} = \frac{15}{4}; D\left(1; -\frac{1}{2}\right)\right]$

90 Determina per quale valore di k le rette $(k + 1)x + + y - 4 = 0$ e $kx + (k - 1)y + 2 = 0$ si intersecano sull'asse delle ordinate. $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

91 Determina per quale valore di k le rette
$(k - 2)x + + ky - 1 = 0$ e $2x - ky + 2 = 0$
si incontrano sull'asse delle ascisse. $[k = 1]$

92 Di un parallelogramma $ABCD$ sono noti l'equazione del lato AB, $y = -3x + 6$, il vertice $C(-1; 1)$, l'ascissa -4 del vertice D e l'ascissa -6 del vertice A.
Determina le coordinate mancanti dei vertici A, B, D. $[A(-6; 24); B(-3; 15); D(-4; 10)]$

93 Sono dati i punti $A(-1; 3)$ e $B(3; 1)$, e M è il loro punto medio.

a) Determina l'equazione dell'asse del segmento AB e verifica che tale retta passa per l'origine degli assi.

b) Conduci da B la retta r parallela a OM e da O la retta s parallela ad AB, e trova le loro equazioni.

c) Detto D il punto di intersezione di r e s, stabilisci la natura del quadrilatero $ABDO$ e calcolane l'area.

$\left[\text{a) } y = 2x; \text{ b) } r: y = 2x - 5, s: y = -\frac{1}{2}x;\right.$
$\left.\text{c) } D(2; -1); \text{area} = \frac{15}{2}\right]$

6. Il metodo di Cramer

Teoria a pag. 712

RIFLETTI SULLA TEORIA

Il determinante

137 Come cambia il valore del determinante di un sistema lineare di due equazioni in due incognite se vengono scambiate le righe? E se si scambiano le colonne? E se si scambiano contemporaneamente righe e colonne?

Il metodo di Cramer

138 VERO O FALSO?

a) Se il determinante D di un sistema lineare con due equazioni in due incognite è nullo, allora il sistema è impossibile. V F

b) Il determinante D_x si ottiene dall'espressione del determinante D sostituendo nella prima colonna ai coefficienti dell'incognita x i termini noti. V F

c) Se il determinante D_y è nullo, allora $y = 0$. V F

d) Il determinante D_y del sistema $\begin{cases} 3x - 5y - 2 = 0 \\ 4x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ è $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ V F

ESERCIZI

Il calcolo dei determinanti

ESERCIZIO GUIDA

139 Calcoliamo il determinante $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

Poiché, in generale:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 = -2 - 12 = -14.$$

Calcola i seguenti determinanti.

140 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $[-1]$

141 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $[1]$

142 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $[0]$

143 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $[-22]$

144 $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ $[22]$

145 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ $[1]$

146 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -6 & 8 \end{vmatrix}$ $[2]$

147 $\begin{vmatrix} 2a^2 & -3a^3 \\ -5a & 4a^2 \end{vmatrix}$ $[-7a^4]$

148 $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a+2b & 3a-3b \end{vmatrix}$ $[a^2-b^2]$

149 TEST Quale delle seguenti equazioni deve essere sostituita ai puntini in modo tale che il sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

abbia il determinante D uguale a -2?

- A $-2x + 6y = 0$
- B $2x + 6y = 3$
- C $-2x - 6y = 3$
- D $2x - 6y = 3$
- E $6x - 2y = 3$

150 TEST Il determinante del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$ vale:

A 5 B -11 C 10 D 2 E -10

151 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il determinante

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 2 - 3k & 4 \end{vmatrix}$$

è uguale a -1? $\left[\frac{5}{13}\right]$

Il metodo di Cramer

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

152 Utilizzando il metodo di Cramer, risolviamo i sistemi:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6x - 3y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

---

a) $\begin{cases} 2\,x - 3\,y = 1 \\ 4\,x + 7\,y = 15 \end{cases}$

Calcoliamo il determinante D, formato dai coefficienti di x e di y:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & +7 \end{vmatrix} = 14 + 12 = 26.$$

Calcoliamo D_x, ottenuto da D sostituendo la prima colonna dei coefficienti di x con i termini noti:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 15 & +7 \end{vmatrix} = 7 + 45 = 52.$$

Calcoliamo D_y, ottenuto da D sostituendo la seconda colonna dei coefficienti di y con i termini noti:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 4 = 26.$$

Calcoliamo la soluzione:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{52}{26} = 2; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{26} = 1.$$

La soluzione del sistema è $(2; 1)$.

b) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6x - 3y = 4 \end{cases}$

Calcoliamo $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$

Il sistema non è determinato. Per decidere se è impossibile o indeterminato, calcoliamo D_x. Se $D_x = 0$, dobbiamo calcolare anche D_y; se invece $D_x \neq 0$, il sistema è impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0.$$

Il sistema è quindi impossibile.

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

Calcoliamo $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$

Il sistema non è determinato.

Calcoliamo $D_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0.$

Calcoliamo $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{vmatrix} =$

$= -30 + 30 = 0.$

Essendo $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, il sistema è indeterminato.

Risolvi i seguenti sistemi, utilizzando il metodo di Cramer.

153 $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ $[(1; 2)]$

154 $\begin{cases} 2x - 4 + y^2 = y(y-3) + 16 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ $[(7; 2)]$

155 $\begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ x(2x-1) - x^2 + y = x^2 + 2y + 3 \end{cases}$ $[(2; -5)]$

156 $\begin{cases} 4x + 5y + 23 = 0 \\ 9(2-x) + y + 7 = -9 \end{cases}$ $[(3; -7)]$

157 $\begin{cases} 4x + 2y + 5 = 3 \\ \dfrac{6}{5}y + \dfrac{3}{2}x - 1 = -4 \end{cases}$ $[(2; -5)]$

158 $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x + y = -2 \\ \dfrac{4}{5}y + x = 2 - \dfrac{x}{2} \end{cases}$ $[(4; -5)]$

159 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{5}x = 5 \\ 2x - \dfrac{5}{6}y + 3 = 8 \end{cases}$ $[(5; 6)]$

160 $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{3} + 1 = \dfrac{1}{3} \\ 3x + 5y = -4 \end{cases}$ $[(2; -2)]$

161 $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ x(x-2) + y(y+3) = (x+y)^2 - 2xy - 7 \end{cases}$ $[(2; -1)]$

162 $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ [impossibile]

163 $\begin{cases} 2(2y - x) = 6(x-1) \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$ [indeterminato]

BRAVI SI DIVENTA ► E32

164 $\begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y(x-8) = x(1+y) - (2-x)(x+2) + \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3(y+1) - x}{2} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{7y - x - 4}{6} \end{cases}$

RIEPILOGO LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI

165 VERO O FALSO?

a) Il sistema $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ ax + 8y = 6 \end{cases}$ per $a = 2$ è impossibile. V F

b) Il determinante $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ vale 0 se $k = 1$. V F

c) Il sistema $\begin{cases} x = y - 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ rappresenta nel piano cartesiano due rette parallele, quindi è impossibile. V F

d) Il sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ V F

166 Dimostra che il sistema $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 8x - 6y = 4 \end{cases}$ è indeterminato. Come puoi esprimere le infinite coppie di soluzioni utilizzando un solo parametro reale? $\left[\left(k; \dfrac{4k-2}{3}\right), \text{con } k \in \mathbb{R}\right]$

167 **COMPLETA** i seguenti sistemi in modo che ognuno sia come indicato a fianco.

$\begin{cases} 3x - 2y = \dots \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ indeterminato; $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ 2x - \dots y = 3 \end{cases}$ impossibile;

$\begin{cases} \dots x + 2y = 1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ determinato; $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 3x - 9y = \dots \end{cases}$ impossibile.

168 Dimostra che il sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ è impossibile in tre modi:

a) risolvendolo;
b) interpretando graficamente il sistema;
c) considerando i rapporti dei coefficienti.

169 Tra le equazioni

a) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y = 6$, b) $-5x + 3y = 1$, c) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = 3$, d) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{5}y = 2$,

quali puoi scegliere per costruire un sistema che abbia determinante D nullo e D_x e D_y non nulli? E quali per ottenere un sistema che abbia determinante D uguale a 1? [a) e d) oppure c) e d); b) e c)]

170 Dopo aver scritto in forma normale il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & y \\ -1 & x \end{vmatrix} = -1 \\ \begin{vmatrix} x & -4 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$$

risolvilo con il metodo che ritieni più opportuno. Il sistema ammette le stesse soluzioni se nei due determinanti scambi la prima riga con la seconda? Quale altro cambiamento devi fare, oltre a operare questo scambio, affinché il sistema sia equivalente a quello dato?

[$(-1; 1)$; no; occorre cambiare i segni del secondo membro di ogni equazione]

I sistemi numerici interi

Risolvi i seguenti sistemi lineari, utilizzando per ciascuno il metodo che ritieni più opportuno.

171 $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x(x-2) + 7 = -10 + y(1+y) + (x-y)(x+y) \end{cases}$ [$(10; -3)$]

172 $\begin{cases} 5 - x + (x - 3y)(x+1) + y^2 + xy = (x-y)^2 + x - 2y + 10 \\ 5 + y = 0 \end{cases}$ [$(0; -5)$]

173 $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) - \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{9}{16} = -x^2 - \frac{y}{3} \\ -\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$ [$(15; -15)$]

174 $\begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}(x - y) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)\right]$

175 $\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}(y-x) + \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2}(2y - x + 2) = \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)\right]$

176 $\begin{cases} \frac{1}{7}(x+3) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{7} - y\right) - \frac{1}{7} \\ 2x = \frac{1}{2}(9 - 5y) \end{cases}$ $\left[\left(\frac{7}{2}; -1\right)\right]$

177 $\begin{cases} \frac{1}{6}(x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}y \\ \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(1 - x) \end{cases}$ $\left[\left(5; -\frac{2}{3}\right)\right]$

178 $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{y-1}{2} = \frac{2x-5}{3} \\ \frac{3y-2}{4} - \frac{y-2x}{2} = \frac{8x+3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{2}; 3\right)\right]$

179 $\begin{cases} 4(x-y) = y - \frac{5}{4} \\ 4\left(x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{11}{2} - 2y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{8}; \frac{3}{4}\right)\right]$

180 $\begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{3}{5}y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{5}\right) \\ 2\left(x + y + \frac{1}{9}\right) = y + 1 \end{cases}$ $\left[\left(1; -\frac{11}{9}\right)\right]$

181 $\begin{cases} \frac{1}{11}(x + 12y) = y + \frac{4}{15} \\ \frac{1}{5}x - 3y = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{3} - 4x\right) \end{cases}$ $\left[\left(\frac{7}{3}; \frac{3}{5}\right)\right]$

182 $\begin{cases} \frac{1}{2}(5x - 3y) - \frac{2x-1}{3} = 8 + \frac{1}{2}(6y - 5) \\ \frac{2x-3}{4} - \frac{1-3y}{2} = \frac{6y-1}{2} + \frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(2; -\frac{1}{3}\right)\right]$

183 $\begin{cases} 2(2y - 1) = -\frac{1}{3}x \\ \frac{x + 3y - 1}{3} = 2\left(\frac{1}{3}x - y\right) \end{cases}$ $\left[\left(2; \frac{1}{3}\right)\right]$

184 $\begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}(x - y) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)\right]$

185 $\begin{cases} (x+y)\left(\frac{1}{15} + y\right) - xy + \frac{y}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{15}y + y^2 \\ 1 - \frac{2y}{15} = -\frac{x}{5} \end{cases}$ $[(-3; 3)]$

186 $\begin{cases} \frac{-(x+1)(x-1) + x(x+1)}{2} - 1 = \frac{y+3}{4} \\ \frac{1}{2}\left[(x-1) - \frac{y-1}{2}\right] = 1 \end{cases}$ [indeterminato]

187 $\begin{cases} \frac{1}{6}[3x - 4y - (2x - 7)] + \frac{x(x-1)}{4} - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}y \\ \frac{x - 2y}{2} - \frac{3x + y}{3} = \frac{3 - y}{3} \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{14}{3}; \frac{4}{3}\right)\right]$

188 $\begin{cases} \frac{(y-x)(1+x) - x(y-x)}{10} = \frac{y}{6} - 4 \\ \frac{(y-x)(y+x) - (x-y)}{2} - \frac{x}{4} = 6 + \frac{y^2 - x^2}{2} \end{cases}$ $[(16; 36)]$

189 $\begin{cases} \dfrac{2}{15} - xy = \dfrac{3}{5} + (1-y)(x-1) \\ (x+y)(4-x) + x^2 + 2x = 2 - xy + y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{2}{15}; \dfrac{2}{5}\right)\right]$

190 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x+2y)(x+1) - \dfrac{2}{3}xy - 5 = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y-x}{4} \\ \dfrac{2(x-8)-y}{7} - 2 = -\dfrac{y+4}{3} \end{cases}$ $[(35; -37)]$

191 $\begin{cases} 3x(2y-2) + 3x - 2y - 6 + 2y = 5(3x-1) - 2y + 1 + (3x-1)(2y-1) \\ 1 - 3x + (3x+4y-3)^2 + 1 + 3(x-y) - y = 3x(3x-2) + 4(2y-1)(2y+3x-2) \end{cases}$ $\left[\left(0; \dfrac{3}{4}\right)\right]$

192 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + [(x+2y)(x-1) - x^2 + x] = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{y}{2}\right) + y(2x-2) \\ 2y - \dfrac{13}{3}x = -3 \end{cases}$ $\left[\left(1; \dfrac{2}{3}\right)\right]$

193 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - y + (x-y)^2 - 4xy = \dfrac{1}{2} + x^2 + y^2 - 6xy \\ \dfrac{3}{2}(x-1) - \left(y - \dfrac{1}{3}x\right) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

194 $\begin{cases} (x+2y)^2 - x(x-1) - y(1+4y) = 3 + 4xy \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{4}y \end{cases}$ $[(5; 2)]$

195 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+y)^2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x}{3} - xy = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{2}{3}y \\ \dfrac{x-y}{3} - 1 = -\dfrac{x+3y}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{14}\right)\right]$

196 $\begin{cases} (2x-1)^2 - (x-2)(4x+3) = (y-1)(y+2) - y^2 \\ \dfrac{x-2y}{2} - \dfrac{1}{4}(2-x) = \dfrac{1}{4}(5-y) \end{cases}$ [impossibile]

197 $\begin{cases} \dfrac{(x+y)[1-(x-y)] + x^2}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{y^2}{6} = 2 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{x+y}{4} \\ \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{x-6}{2} \end{cases}$ $[(6; -4)]$

198 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x-2y)(2x-y) - \dfrac{1}{3}x(3x-1) = \dfrac{1}{3}y\left(1 - \dfrac{15}{2}x + 3y\right) + \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{2}(3x-1) - \dfrac{1}{3}(y-2x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{6}(2y+7) \end{cases}$ [indeterminato]

359 $\begin{cases} 3(a+1)x - 2y = 2a - z \\ 2ax + 4y - z = -2a \\ 3ax + 5y = a - \dfrac{z}{2} \end{cases}$ $\left[a = -\dfrac{7}{9}, \text{indet.}; a \neq -\dfrac{7}{9}, (0; 0; 2a)\right]$

360 $\begin{cases} ax + y = 0 \\ ax - y = (a+1)z + 2a \\ 2ax + 3y = 4az - a \end{cases}$ $\left[a = 0, a = -\dfrac{1}{9}, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq -\dfrac{1}{9}, (1; -a; 0)\right]$

Sistemi lineari e problemi

ESERCIZI Nel sito: ▶ 15 esercizi di recupero

361 **COMPLETA** la seguente tabella.

TESTO DEL PROBLEMA	EQUAZIONI CHE TRADUCONO IL PROBLEMA	SOLUZIONE
Un rettangolo ha l'altezza che è i … della … . Se l'altezza aumenta di 2 cm e la base diminuisce di 10 cm, il perimetro del rettangolo diventa uguale a 56 cm. Trova la base e l'altezza del rettangolo.	$y = \dfrac{5}{4}x$ …	
Determina tre numeri naturali tali che la loro …… sia 18, il secondo sia $\dfrac{3}{4}$ del primo e che la somma tra il secondo e il terzo sia … .	$x + y + z = 18$ … $\ldots = 2$	
Trova due numeri tali che la …… tra il doppio del primo e il …… del secondo sia …, sapendo che il primo supera di … i $\dfrac{3}{2}$ del … .	$2x - 3y = 15$ $x = \dfrac{3}{2}y + 10$	

362 **TEST** Considera il seguente problema. «Determina due numeri x e y tali che la loro differenza sia uguale a 12 e che la metà del maggiore superi di 6 la metà del minore». Puoi affermare che il problema:

- **A** ha soluzione $x = 12, y = 2$.
- **B** non ammette soluzione.
- **C** è indeterminato.
- **D** ha $x = -2, y = 14$.
- **E** ha soluzione $x = -14$.

363 **TEST** Un'urna contiene 300 palline di tre colori: rosso, blu e giallo. Le palline gialle sono 54, mentre il numero delle palline rosse supera di 26 il numero delle palline blu. Quante sono le palline blu?

- **A** 111
- **B** 136
- **C** 137
- **D** 110
- **E** È impossibile determinarlo.

Problemi vari in due incognite

ESERCIZIO GUIDA

364 Hai a disposizione € 5,00 per acquistare penne e quaderni. Se compri 4 quaderni e 3 penne, ti mancano € 0,25; se compri 3 quaderni e 3 penne, ti avanzano € 0,65. Quanto costa un quaderno e quanto una penna?

1. **Richieste:**
   Costo di un quaderno
   Costo di una penna
2. **Incognite:**
   x = costo di un quaderno (in euro)
   y = costo di una penna (in euro)
3. **Relazioni:**
   Costo di 4 quaderni + costo di 3 penne = 5 + 0,25
   Costo di 3 quaderni + costo di 3 penne = 5 − 0,65
4. **Sistema risolvente:**
   $$\begin{cases} 4x + 3y = 5{,}25 \\ 3x + 3y = 4{,}35 \end{cases}$$
   Condizioni: $x > 0$, $y > 0$, perché rappresentano il prezzo di due oggetti.

5. **Risoluzione:**
   Poiché i coefficienti di y nelle due equazioni sono uguali, risulta semplice utilizzare il metodo di riduzione. Sottraiamo membro a membro:
   $$- \begin{cases} 4x + 3y = 5{,}25 \\ 3x + 3y = 4{,}35 \end{cases} \to \begin{cases} 4 \cdot 0{,}9 + 3y = 5{,}25 \\ x = 0{,}9 \end{cases} \to \begin{cases} 3y = 5{,}25 - 3{,}6 = 1{,}65 \\ x = 0{,}9 \end{cases} \to \begin{cases} y = 0{,}55 \\ x = 0{,}9 \end{cases}$$
   $$x \quad = 0{,}9$$
   La soluzione del sistema è (0,9; 0,55).
   Controllo: La soluzione è accettabile perché entrambi i valori sono numeri positivi.
6. **Risposta:** Un quaderno costa € 0,90, una penna costa € 0,55.

365 Un automobilista percorre 615 km in due giorni. Sapendo che il tragitto del primo giorno è doppio di quello del secondo giorno, trova quanti km ha percorso ogni giorno. [410 km; 205 km]

366 Una scatola contiene forchette a 2 e a 3 punte. Sapendo che le forchette in totale sono 22 e che le punte in totale sono 54, calcola quante sono le forchette a 2 punte e quante quelle a 3. [12; 10]

367 Lucia e Elena sono sorelle. La somma delle loro età è 31 e Lucia è nata tre anni prima di Elena. Quanti anni ha ciascuna? [17; 14]

368 Possiedo € 30,00. Con questo denaro acquisto alcune magliette da € 6,50 ciascuna e alcuni calzini da € 3,50 al paio. Sapendo che il numero di magliette coincide col numero di paia di calzini, calcola quante sono. [3]

369 Carlo e Laura possiedono due somme di denaro. Complessivamente potrebbero acquistare 6 confezioni di caramelle da € 0,35 ciascuna. Se Carlo regala € 0,20 a Laura, giungono ad avere la stessa somma di denaro. Quanto possiede Carlo e quanto Laura? [€ 1,25; € 0,85]

370 Un fruttivendolo compera una cesta di mele a € 0,45 al kg e un sacco di patate a € 0,10 al kg, spendendo in tutto € 6,40. Trova il peso delle mele e quello delle patate, sapendo che la cesta di mele costa il quintuplo del sacco di patate, più € 0,40. [12 kg; 10 kg]

371 Il proprietario di un ristorante ha comperato 300 bottiglie di vino e 50 di liquore, spendendo € 450,00. Ora compera 600 bottiglie della stessa qualità di vino e 120 bottiglie di liquore, spendendo € 960,00. Trova il costo di una bottiglia di vino e il costo di una bottiglia di liquore. [€ 1; € 3]

372 10 sacchi di frumento e 8 di mais pesano 1646 kg; 30 sacchi di frumento e 12 di mais, rispettivamente uguali ai precedenti, pesano 3894 kg. Quanto pesa ciascun sacco di frumento e ciascun sacco di mais? [95 kg; 87 kg]

373 Un bibliotecario vuole disporre in ordine dei libri di storia sugli scaffali di una libreria. Se mette 8 libri su ogni scaffale, ne rimane vuoto uno; se invece mette 6 libri su ogni scaffale, riempie la libreria ma gli restano fuori 2 libri. Quanti libri deve sistemare il bibliotecario? [32]

374 In un numero di due cifre la differenza tra la cifra delle decine e quella delle unità è 4. Dividendo la cifra delle decine aumentata di 3 per la cifra delle unità, si ottiene per quoziente 4 e resto 1. Trova il numero. [62]

375 Determina due numeri naturali, sapendo che la loro somma divisa per la loro differenza dà per quoziente 3 e resto 4 e che la somma di $\frac{1}{6}$ del maggiore e di $\frac{2}{5}$ del minore vale 7. [18; 10]

376 Sommando ai $\frac{5}{6}$ della somma di due numeri i $\frac{3}{4}$ della loro differenza, si ottiene 37. Sapendo che sommando i $\frac{3}{7}$ del minore al maggiore si ottiene 26, determina i due numeri naturali. [7; 23]

377 Il rapporto tra la differenza di due numeri e la somma aumentata di 6 è $\frac{1}{3}$. Aggiungendo 3 al numero minore e togliendo 6 al maggiore, si ottiene lo stesso risultato. Determina i due numeri. [6; 15]

378 Due numeri naturali sono rispettivamente proporzionali ai numeri 3 e 5 secondo uno stesso fattore di proporzionalità. Aggiungendo 2 al minore e togliendo 5 al maggiore, si ottengono due numeri il cui rapporto è $\frac{7}{10}$. Trova i due numeri. [33; 55]

379 La differenza delle età di due fratelli vale la metà dell'età del minore, la loro somma vale i $\frac{5}{3}$ dell'età del maggiore. Determina le due età. [indeterminato]

380 In un numero di due cifre la cifra delle decine è doppia di quella delle unità. Scambiando le due cifre si ottiene un nuovo numero che è minore del primo di 36. Determina il numero di partenza. (Suggerimento. Se x è la cifra delle decine e y quella delle unità, il numero è $10 \cdot x + y$.) [84]

381 Determina una frazione, sapendo che la cifra al denominatore è il doppio della cifra al numeratore aumentato di 1 e che, diminuendo di 1 la cifra al numeratore e aumentando di 1 quella al denominatore, si ottiene la frazione $\frac{1}{3}$. $\left[\frac{5}{11}\right]$

382 In un negozio di alimentari vi sono 23 confezioni di cioccolatini. Alcune contengono 3 cioccolatini e altre 10. Sapendo che complessivamente le confezioni contengono 111 cioccolatini, calcola quante sono le confezioni da 3 cioccolatini e quante quelle da 10. [17; 6]

383 In una prima elementare sono iscritti 18 alunni. Sapendo che alcuni di questi hanno 5 anni e altri 6, e che l'età complessiva degli iscritti è di 100 anni, calcola quanti sono i bambini di 5 anni e quanti di 6. [8; 10]

384 Un'agenzia immobiliare vende per conto di un cliente due appartamenti per complessivi € 400 000. A quanto è stato venduto ciascuno dei due appartamenti sapendo che per il primo sono stati spesi in più i $\frac{2}{9}$ del prezzo del secondo? [€ 220 000, € 180 000]

385 In un numero di due cifre la somma delle cifre è 11. Dividendo il numero per la cifra delle decine, si ottiene per quoziente 14 e resto 1. Trova il numero. [29]

386 L'età di una madre supera di 5 il quintuplo dell'età del figlio. Tra 7 anni l'età della madre sommata a quella del figlio darà per risultato 55. Trova le due età. [35; 6]

387 In una fabbrica ci sono 2 macchine, la prima produce 10 pezzi all'ora, la seconda 7 pezzi all'ora. Le due macchine hanno prodotto in tutto 191 pezzi, lavorando complessivamente 23 ore. Determina il numero dei pezzi prodotti dall'una e dall'altra macchina. [100; 91]

388 Due serbatoi hanno capacità rispettivamente proporzionali a 7 e 4. Il serbatoio maggiore contiene tanto liquido quanto quello minore più i $\frac{3}{4}$ di quest'ultimo. Determina le capacità. [indeterminato]

389 In un parcheggio ci sono 20 tra automobili e camion. Sapendo che i camion hanno 6 ruote, invece di 4 come le automobili, e che ci sono complessivamente 86 ruote, calcola quante sono le automobili e quanti i camion. [17; 3]

390 Trova due numeri sapendo che dividendo il doppio del maggiore per il minore si ottiene per quoziente 2 e resto 10 e aumentando il maggiore di 11 si ottiene il doppio del minore. [16; 21]

391 Determina due numeri naturali, sapendo che, dividendo il primo per il secondo, si ottiene 3 per quoziente e 1 per resto e che il primo diminuito di 1 è 3 volte il secondo. (Suggerimento. Se dividiamo a per b con quoziente q e resto r, otteniamo $a = bq + r$.) [indeterminato]

392 Angela investe un capitale di € 40 000 in banca, in parte al tasso annuo d'interesse al 5% e il rimanente al 3%. Se dopo un anno il guadagno della prima quota supera di € 300 quello della seconda, a quanto ammontava ciascuna delle due quote investite? Quali sono i due guadagni? [€ 18 750, € 21 250; € 937,50, € 637,50]

Problemi di geometria in due incognite

ESERCIZIO GUIDA

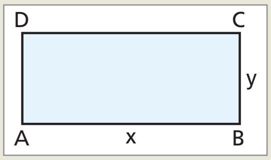
393 Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

1. Richieste:
Lunghezza di AB (in cm)
Lunghezza di BC (in cm)

2. Incognite:
$x = \overline{AB}$ $\quad y = \overline{BC}$

Condizioni:
$x > 0, y > 0$, poiché sono misure di lunghezza.

3. Relazioni e dati:
Perimetro $= 48$ cm
$$2 \cdot \overline{BC} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$$



4. Sistema risolvente:
$$\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ 2y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

5. Risoluzione:
$$\begin{matrix} :2 \\ :2 \end{matrix}\begin{cases} x + y = 24 \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{3}x = 24 \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3}x = 24 \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 24 \cdot \dfrac{3}{4} = 18 \\ y = \dfrac{1}{3} \cdot 18 = 6 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è (18; 6).
Controllo: La soluzione è accettabile poiché 18 e 6 sono entrambi positivi.

6. Risposta: Il rettangolo ha la base di 18 cm e l'altezza di 6 cm.

BRAVI SI DIVENTA ▶ E33

394 In un trapezio isoscele che ha il perimetro uguale a 128 cm, il rapporto tra la base maggiore e la base minore è $\frac{9}{4}$. Trova l'area del trapezio sapendo che i $\frac{7}{5}$ del lato obliquo superano di 19 cm i $\frac{2}{3}$ della base minore.

395 Calcola la lunghezza di due segmenti, sapendo che la loro somma è 19 m e la loro differenza è 5 m. [12 m; 7 m]

396 In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo. [25 cm; 15 cm]

397 Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo, sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato. [24 cm^2; 20 cm]

398 Calcola l'area di un rombo, sapendo che il rapporto tra le diagonali è $\frac{5}{2}$ e che la differenza fra la maggiore e il doppio della minore vale la metà della minore. [indeterminato]

399 Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo, sapendo che la somma di $\frac{1}{10}$ della maggiore e $\frac{1}{9}$ della minore è 19 m e che, diminuendo la maggiore di 10 m e aumentando di 9 m la minore, le due diagonali diventano congruenti. [100 m; 81 m]

400 Calcola i raggi di due circonferenze concentriche, sapendo che la loro differenza è 4 cm e che il raggio minore è la metà di quello maggiore aumentata di 1 cm. [6 cm; 10 cm]

401 Calcola l'ampiezza dei due angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che la somma del minore e dei $\frac{3}{7}$ del maggiore vale i $\frac{5}{2}$ del minore. [70°; 20°]

402 Determina le ampiezze di due angoli supplementari, sapendo che essi diventano congruenti sottraendo 20° al maggiore e sommando 20° al minore. [110°; 70°]

403 Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 14 m e che l'altezza supera la base di 1 m. [5 m]

404 Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio, sapendo che l'area è 32 cm^2, l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm. [10 cm; 6 cm]

405 Calcola l'area di un trapezio isoscele, sapendo che le basi differiscono di 6 m, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 m e che il lato obliquo è 5 m. [48 m^2]

406 Calcola le lunghezze dei lati di un parallelogramma, sapendo che il perimetro vale $34k$ e che il maggiore è uguale al doppio del minore più $2k$. [$12k$; $5k$]

407 Calcola l'area di un triangolo isoscele, sapendo che il perimetro è $16a$ e che il doppio del lato obliquo è uguale alla base aumentata dei suoi $\frac{2}{3}$. [$12a^2$]

408 In un trapezio rettangolo, la differenza tra le basi vale $12k$. La base maggiore è uguale agli $\frac{8}{5}$ della base minore. Sapendo che l'altezza è $5k$, calcola area e perimetro. [$130k^2$; $70k$]

409 Calcola il perimetro di un rombo, sapendo che le sue diagonali differiscono di $2a$ e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di $5a$. [$20a$]

410 Calcola l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 26 cm e che, se si tolgono 2 cm alla dimensione maggiore e si aggiungono 3 cm alla dimensione minore, quest'ultima diventa superiore di 4 cm rispetto all'altra. [42 cm^2]

411 Due circonferenze sono tangenti. La distanza tra i centri vale il doppio del raggio minore più 2 cm. Il raggio maggiore, sommato ai $\frac{4}{3}$ del raggio minore, vale 9 cm. Calcola le aree dei due cerchi. [9π cm^2; 25π cm^2]

412 Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo, sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l'area diminuisce di 2 cm^2. [8 cm; 4 cm]

41 VERO O FALSO?

a) La radice quadrata di un qualsiasi numero reale esiste ed è unica. V F

b) Per ogni numero intero positivo n, risulta $\sqrt[n]{0} = 0$. V F

c) La potenza con esponente $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ della radice n-esima di un numero $a \in \mathbb{R}_0^+$ è uguale al numero a. V F

d) Nel radicale $\sqrt{7^3}$ l'indice è 3 e l'esponente del radicando è 2. V F

e) I radicali $\sqrt[3]{x^2}$ e $\sqrt[5]{y^2}$ hanno lo stesso indice. V F

42 Perché l'uguaglianza $\sqrt{(-7)^2} = -7$ è falsa?

43 TEST Nel radicale $\sqrt[5]{x^2y^4}$, l'indice e l'esponente del radicando sono rispettivamente:

A 5, 6. B 6, 5. C 5, 2. D 5, 4. E 5, 8.

44 TEST A quale delle seguenti equivale l'uguaglianza $x^3 = y^2$, con $x, y \in \mathbb{R}_0^+$?

A $y = \sqrt[3]{x^2}$

B $x = \sqrt[3]{y^2}$

C $x = \sqrt{y^3}$

D $x = \sqrt[6]{y}$

E $y = \sqrt[6]{x}$

45 Per quale motivo la scrittura $\sqrt[0]{3}$ è priva di significato?

ESERCIZI

Le potenze e le radici

46 COMPLETA, quando è possibile, inserendo la base mancante nelle seguenti potenze.

$(.....)^5 = 32$; $(.....)^2 = -9$;

$(.....)^3 = -8$; $(.....)^4 = 625$.

47 COMPLETA inserendo l'esponente mancante nelle seguenti potenze.

$(2)^{...} = 64$; $(3)^{...} = 27$;

$(-5)^{...} = 625$; $(4)^{...} = 64$.

48 COMPLETA applicando la definizione di radice n-esima: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$.

$\sqrt[4]{16} = \ldots$; $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \ldots$; $\sqrt[3]{27} = \ldots$; $\sqrt{2^6} = \ldots$; $\sqrt{81a^4} = \ldots$; $\sqrt[4]{x^8} = \ldots$; $\sqrt{16a^4b^8} = \ldots$.

49 Determina, quando è possibile, le radici quadrate dei seguenti numeri.

25; 36; -81; 49; -144; 121.

50 Determina le radici cubiche dei seguenti numeri.

-27; -343; 8; 64; 1000; 125.

Determina, quando è possibile, la radice.

51 $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[4]{0}$.

52 $\sqrt{1}$; $\sqrt[4]{625}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt[5]{-1}$.

53 $\sqrt[5]{0}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[4]{-625}$; $\sqrt[6]{-1}$.

Stabilisci quali delle seguenti radici esistono in $\mathbb{R}$.

54 $\sqrt[4]{8}$; $\sqrt[3]{-7}$; $\sqrt[6]{-2}$; $\sqrt{-1}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt[4]{0}$.

55 $\sqrt{\dfrac{25}{16} - 1}$; $\sqrt[3]{2 - \dfrac{46}{27}}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[4]{(-3)^2}$.

Calcola le seguenti radici, se esistono in $\mathbb{R}$.

56 $\sqrt{\frac{1}{100}}$; $\sqrt[3]{-125}$; $\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; $\sqrt{-(-2)^4}$.

57 $\sqrt[3]{-(-2)^3}$; $\sqrt[4]{-\frac{1}{25}}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^3}$; $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$.

4. I radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Teoria a pag. 666

RIFLETTI SULLA TEORIA

58 Quando si applica la proprietà invariantiva dei radicali, come deve essere il fattore che moltiplica o divide l'indice del radicale e l'esponente del radicando? Fai degli esempi.

59 Nella scrittura $\sqrt[12]{a^{36}} = \sqrt[4]{a^9}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, la proprietà invariantiva è stata applicata in modo corretto?

60 TEST Quale dei seguenti radicali è equivalente al radicale $\sqrt[8]{a^{12}}$?

A $\sqrt{a^3}$
B $\sqrt{a^4}$
C $\sqrt{|a|}$
D $\sqrt{|a|^3}$
E $|\sqrt{a^3}|$

61 Perché il radicale $\sqrt[8]{4^3}$ è semplificabile?

62 VERO O FALSO?

a) Il radicale $\sqrt[n]{x^m}$ è semplificabile se M.C.D.$(m; n) = 1$. V F

b) Per semplificare un radicale è sufficiente dividere indice ed esponente per il loro m.c.m. V F

c) Il radicale $\sqrt[6]{a^3}$ è equivalente a $\sqrt{a}$. V F

d) Se $a \in \mathbb{R}_0^+$, allora $\sqrt{a^2} = a$. V F

e) $\sqrt{10} < \sqrt[3]{12}$ poiché $10 < 12$. V F

63 Confronta i radicali $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{11}$. Descrivi, prima con le parole poi con i numeri, il procedimento per confrontare due radicali.

ESERCIZI

CACCIA ALL'ERRORE

Operando con radicali in $\mathbb{R}_0^+$, indica quali delle seguenti scritture non sono corrette, spiegando il perché.

64 $\sqrt[4]{(-9)^4} = -9$;
$\sqrt{(-5)^2} = 5$;
$\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2|$;
$\sqrt{-7^2} = 7$.

65 $\sqrt[3]{|-8|} = 2$;
$\sqrt[3]{|-4|^3} = 4$;
$\sqrt[3]{-27} = |-3|$;
$\sqrt[3]{125} = |5|$.

66 $-\sqrt{4} = 2$;
$-\sqrt[3]{-8} = 2$;
$-\sqrt{-4} = 2$;
$-\sqrt[3]{8} = -2$.

Le condizioni di esistenza dei radicali in $\mathbb{R}_0^+$

ESERCIZIO GUIDA

67 Determiniamo le condizioni d'esistenza dei seguenti radicali in $\mathbb{R}_0^+$: a) $\sqrt{3x^2y^5}$; b) $\sqrt[3]{a-2}$.

a) $\sqrt{3x^2y^5}$.

Il radicando è il prodotto di tre fattori e deve essere positivo o nullo: 3 è un numero positivo; x^2 è sempre positivo o nullo, indipendentemente dal segno di x, poiché il suo esponente è pari; y^5, avendo esponente dispari, assume il segno di y, quindi, affinché y^5 sia positivo o nullo, occorre che sia $y \geq 0$. Pertanto C.E.: $y \geq 0$.

b) $\sqrt[3]{a-2}$.

Il radicando è il binomio $a - 2$, che non si scompone in fattori. Dobbiamo porre $a - 2$ maggiore o uguale a 0, ossia:

$a - 2 \geq 0$, da cui $a \geq 2$.

Quindi:

C.E.: $a \geq 2$.

Determina le condizioni d'esistenza dei seguenti radicali in $\mathbb{R}_0^+$.

68 $\sqrt{-\frac{(1-2x)}{3}}$; $\sqrt[4]{x^2+1}$; $\sqrt{-1-x}$.

69 $\sqrt{(-a)^4}$; $\sqrt{\frac{1}{a+1}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{(a-2)^2}}$.

70 $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$; $\sqrt{\frac{1}{-x^4}}$; $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$.

71 $\sqrt{|x-3|}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{|x|}}$; $\sqrt{-x}$.

La proprietà invariantiva

ESERCIZIO GUIDA

72 Indichiamo fra le seguenti coppie di radicali (con $a, b \in \mathbb{R}_0^+$) quelle equivalenti, applicando la proprietà invariantiva:

a) $\sqrt{27}$, $\sqrt[8]{3^{12}}$; b) $\sqrt{2a^4b}$, $\sqrt[6]{8a^{12}b^3}$; c) $\sqrt{a^3b}$, $\sqrt[4]{a^9b^2}$; d) $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}$, con $a \geq b$.

a) $\sqrt{27}$ è equivalente a $\sqrt[8]{3^{12}}$.

Infatti otteniamo il secondo radicale dal primo scrivendo 27 come 3^3 e moltiplicando l'esponente del radicando e l'indice per 4:

$$\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=\sqrt[2\cdot 4]{3^{3\cdot 4}}=\sqrt[8]{3^{12}}.$$

b) $\sqrt{2a^4b}$ è equivalente a $\sqrt[6]{8a^{12}b^3}$.

Infatti otteniamo il secondo radicale dal primo moltiplicando l'esponente del radicando e l'indice per 3:

$$\sqrt{2a^4b}=\sqrt[2\cdot 3]{(2a^4b)^{1\cdot 3}}=\sqrt[6]{(2a^4b)^3}=\sqrt[6]{8a^{12}b^3}.$$

c) $\sqrt{a^3b}$ non è equivalente a $\sqrt[4]{a^9b^2}$.

Infatti, se si moltiplicano per 2 l'esponente del radicando e l'indice, si ottiene:

$$\sqrt{a^3b}=\sqrt[2\cdot 2]{(a^3b)^{1\cdot 2}}=\sqrt[4]{(a^3b)^2}=\sqrt[4]{a^6b^2}$$

e non $\sqrt[4]{a^9b^2}$.

d) $\sqrt[3]{a-b}$ è equivalente a $\sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}$.

Infatti, moltiplicando per 2 indice ed esponente, otteniamo:

$$\sqrt[3]{a-b}=\sqrt[3\cdot 2]{(a-b)^{1\cdot 2}}=\sqrt[6]{(a-b)^2}=$$
$$=\sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}.$$

Fra le seguenti coppie di radicali indica quali sono quelle equivalenti, applicando la proprietà invariantiva. Supponi che siano verificate le condizioni di esistenza dei radicali.

73 $\sqrt[4]{3^2}$, $\sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt{4\cdot 5^3}$, $\sqrt[4]{2^4\cdot 5^6}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{10}}$, $\sqrt[6]{\frac{3^9}{10^2}}$.

74 $\sqrt{8}$, $\sqrt[12]{2^{18}}$; $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[9]{5^6}$; $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[12]{3^8}$.

75 $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[4]{x^2+2x+1}$; $\sqrt{1-x}$, $\sqrt[6]{1-x^3}$.

76 $\sqrt[3]{2ab}$, $\sqrt[6]{4a^2b^2}$; $\sqrt[5]{32a^5b}$, $\sqrt[10]{64a^{10}b^2}$; $\sqrt[3]{2ac}$, $\sqrt[6]{6a^3c^3}$.

77 $\sqrt{2a^3b}$, $\sqrt[4]{8a^3b}$; $\sqrt{2ab^2}$, $\sqrt[6]{8a^3b^6}$; $\sqrt{ab^2c}$, $\sqrt[5]{a^4b^6c^4}$.

78 $\sqrt[3]{abc^2}$, $\sqrt[4]{a^2b^2c^3}$; $\sqrt{3ab^2}$, $\sqrt[6]{27a^3b^6}$; $\sqrt{2ab^3}$, $\sqrt[4]{8a^2b^6}$.

79 $\sqrt{3a^2b}$, $\sqrt[6]{9a^6b^3}$; $\sqrt{2abc}$, $\sqrt[3]{6a^3b^3c^3}$; $\sqrt{abc^3}$, $\sqrt[6]{3a^3b^3c^6}$.

80 $\sqrt{a-1}$, $\sqrt[10]{a^{10}-1}$; $\sqrt{\dfrac{9}{2}(2a-5)}$, $\sqrt[6]{\dfrac{27}{8}(2a-5)^3}$.

ESERCIZIO GUIDA

81 Applicando la proprietà invariantiva, determiniamo il radicale equivalente a quello dato, indicando anche le condizioni di esistenza dei radicali.

$\sqrt[4]{2a^5b} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$.

La proprietà invariantiva dice che $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot p]{x^{m \cdot p}}$, con $x^m \geq 0$, $n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Dobbiamo risolvere un problema del tipo $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot p]{\ldots\ldots}$, dove $n = 4$ e $n \cdot p = 12$, ossia $4p = 12$, da cui $p = 12 : 4 = 3$. Pertanto:

$$\sqrt[4]{2a^5b} = \sqrt[12]{(2a^5b)^{\underbrace{12:4}_{\text{quoziente degli indici}}}} = \sqrt[12]{(2a^5b)^3} = \sqrt[12]{8a^{15}b^3}.$$

Per l'esistenza dei radicali basta porre: $ab \geq 0$.
Infatti, se $ab \geq 0$, è anche: $a^5b = a^4(ab) \geq 0$ e $a^{15}b^3 = a^{14}b^2(ab) \geq 0$.

COMPLETA applicando la proprietà invariantiva e determina il radicale equivalente. Scrivi anche le condizioni di esistenza dei radicali.

82 $\sqrt{8} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[15]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[3]{a^4b} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$.

83 $\sqrt{3a^3} = \sqrt[4]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{2b^4} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{a+1} = \sqrt[4]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{2ab^2} = \sqrt[4]{\ldots\ldots}$.

84 $3ab^2 = \sqrt[3]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{2ab^3} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[5]{3ac} = \sqrt[10]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{\dfrac{a^6b^3}{4}} = \sqrt[4]{\dfrac{}{\ldots\ldots}}$.

85 $\sqrt[4]{\dfrac{2a^2b^2}{c^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{}{\ldots\ldots}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{8}{a^7}} = \sqrt[6]{\dfrac{}{\ldots\ldots}}$; $\sqrt{\dfrac{3a}{b^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{}{\ldots\ldots}}$; $\sqrt{\dfrac{1}{2}a} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$.

L'indice o l'esponente sono letterali

ESERCIZIO GUIDA

86 Applicando la proprietà invariantiva, determiniamo il radicale equivalente:

$\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[3n^2]{\ldots\ldots}$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Come nel caso in cui l'indice e l'esponente sono numeri, dobbiamo eseguire la divisione fra gli indici:

$3n^2 : n = 3n^{2-1} = 3n$.

Dobbiamo moltiplicare per $3n$ l'esponente del radicando:

$2 \cdot 3n = 6n$.

Quindi il radicale equivalente è: $\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[3n^2]{a^{6n}}$.

Determina il radicale equivalente (gli indici appartengono a $\mathbb{N} - \{0\}$).

87 $\sqrt{a^m b^2} = \sqrt[6]{\dots\dots}$; $\sqrt{a^{m-2} b^n} = \sqrt[4]{\dots\dots}$; $\sqrt{abc^2} = \sqrt[2n]{\dots\dots}$.

88 $\sqrt{a^m b^2} = \sqrt[2n]{\dots\dots}$; $\sqrt{a^k b} = \sqrt[4k]{\dots\dots}$; $\sqrt[3]{ab^n} = \sqrt[6n]{\dots\dots}$.

89 $\sqrt[5]{a^n b} = \sqrt[10n]{\dots\dots}$; $\sqrt[n]{ab^2} = \sqrt[n^2]{\dots\dots}$; $\sqrt[3]{ab^k} = \sqrt[3k^2]{\dots\dots}$.

La semplificazione di radicali

ESERCIZIO GUIDA

90 Semplifichiamo i radicali: a) $\sqrt[9]{64}$; b) $\sqrt[6]{27x^3y^6}$ (con $x \geq 0$).

a) Scriviamo il radicando come potenza: $64 = 2^6$; dividiamo poi per 3 (che è il M.C.D. tra 9 e 6) l'indice di radice e l'esponente del radicando:

$$\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$$

b) Scriviamo il radicando come una potenza; l'esponente del radicando è 3, quindi dividiamo per 3 l'indice di radice e l'esponente del radicando:

$$\sqrt[6]{27x^3y^6} = \sqrt[6]{3^3x^3y^6} = \sqrt[6]{(3xy^2)^3} = \sqrt{3xy^2}.$$

91 VERO O FALSO?

a) $\sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3}$ V F

b) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$ V F

c) $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$ V F

d) $\sqrt[6]{a^8b^4} = \sqrt[3]{a^4b^2}$ V F

e) $\sqrt[8]{3^4 + 5^4} = \sqrt{3 + 5}$ V F

f) $\sqrt[8]{16} = \sqrt[4]{8}$ V F

Indica quali dei seguenti radicali non si possono semplificare.

92 $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[7]{28}$; $\sqrt[5]{a^{10}y^2}$; $\sqrt[4]{225}$; $\sqrt[9]{216}$.

93 $\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2+b^2}}$; $\sqrt[3]{9a^3}$; $\sqrt[6]{x^2+y^2}$; $\sqrt[4]{4(x+y)^2}$; $\sqrt[8]{\dfrac{64}{a^2+2a+1}}$.

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali, supponendo non negativi i radicandi e i fattori letterali che eventualmente compaiono (anche nei risultati).

94 $\sqrt[10]{32}$; $\sqrt[4]{9}$; $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[10]{16}$; $\sqrt[6]{125}$; $\sqrt[8]{2^{12}}$.

95 $\sqrt[8]{\dfrac{1}{8}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{25}{64}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{2^3}{27}}$; $\sqrt[6]{1000}$; $\sqrt[4]{\dfrac{36 \cdot 7^2}{5^4}}$; $\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}$; $\sqrt[6]{4^2+3^2}$; $\sqrt[4]{13^2-5^2}$.

96 $\sqrt[6]{27a^3b^6}$; $\sqrt[10]{32a^5b^5}$.

97 $\sqrt{a^4b^6}$; $\sqrt{a^2b^4}$; $\sqrt[3]{a^6b^9}$.

98 $\sqrt[6]{a^2(a^2-4a+4)}$

99 $\sqrt[9]{a^3+8+6a^2+12a}$

100 $\sqrt[6]{4a^2b^{12}}$; $\quad \sqrt[10]{4a^4b^2}$.

101 $\sqrt[6]{\frac{1}{9} + a^2 + \frac{2}{3}a}$

102 $\sqrt[4]{\frac{4(2b+1)^2}{25}}$

103 $\sqrt[6]{\frac{(a-1)^2}{b^2+2b+1}}$

104 $\sqrt[6]{\frac{4a^2}{c^4}}$; $\quad \sqrt[10]{\frac{4a^2b^2}{c^6}}$.

105 $\sqrt[4]{\frac{x^3-2x^2}{16x-32}}$

106 $\sqrt[6]{\frac{x^2+2x+1}{a^2+4a+4}}$

107 $\sqrt[9]{\frac{8a^6}{a^3+3a^2+3a+1}}$

108 $\sqrt{x^2+\frac{a^4}{x^2}+2a^2}$

109 $\sqrt[6]{\frac{a-1}{(a^2-1)(a+1)^3}}$

La semplificazione dei radicali con la discussione sul segno dei radicandi

ESERCIZIO GUIDA

110 Semplifichiamo i radicali:

a) $\sqrt[4]{(-5)^6}$; $\quad$ b) $\sqrt[6]{x^2y^4}$; $\quad$ c) $\sqrt{x^2-4x+4}$; $\quad$ d) $\sqrt[8]{\frac{x^2+14x+49}{1-6x+9x^2}}$.

a) $\sqrt[4]{(-5)^6} = \sqrt[4:2]{(-5)^{6:2}} =$

Poiché $(-5)^{6:2} = (-5)^3$ è negativo, dovendo essere il radicando sempre positivo, occorre introdurre il valore assoluto:

$= \sqrt{|-5|^3} = \sqrt{125}$.

b) C.E.: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$. Infatti il radicando è positivo o nullo per qualsiasi valore attribuito a x o a y.

$\sqrt[6]{x^2y^4} = \sqrt[\cancel{6}^{\,3}]{(xy^2)^{\cancel{2}^{\,1}}} = \sqrt[3]{|x|y^2}$.

Per avere il radicando non negativo, dopo la semplificazione occorre introdurre il valore assoluto di x.

c) $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} =$ $\qquad$ C.E.: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, perché l'esponente del radicando è pari.

$= |x-2|$, perché un radicale deve essere non negativo.

d) $\sqrt[8]{\frac{x^2+14x+49}{1-6x+9x^2}} = \sqrt[8]{\frac{(x+7)^2}{(1-3x)^2}} = \sqrt[8]{\left(\frac{x+7}{1-3x}\right)^2} =$

Affinché la frazione algebrica esista, deve essere $1-3x \neq 0$, ossia $x \neq \frac{1}{3}$: C.E.: $\forall\, x \neq \frac{1}{3}$.

Poiché l'esponente del radicando è pari, il radicale esiste:

$= \sqrt[4]{\left|\frac{x+7}{1-3x}\right|}$.

Abbiamo dovuto introdurre il valore assoluto perché ci sono valori di x, ammessi dalle C.E., che rendono il radicando negativo (per esempio, $x = -8$).

111 VERO O FALSO?

a) $\sqrt{(-9)^2} = 9$ V F

b) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1-\sqrt{3}}$ V F

c) $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ V F

d) $\sqrt[4]{(2x-3)^2} = \sqrt{2x-3}$ V F

e) $\sqrt[12]{(-27)^6} = \sqrt{-27}$ V F

f) $\sqrt[n]{a^n} = a,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$. V F

Semplifica, se è possibile, i seguenti radicali dopo aver indicato le condizioni di esistenza.

112 $\sqrt[9]{0{,}027}$; $\sqrt[6]{(-2)^4}$; $\sqrt[8]{36}$. $\left[\sqrt[3]{\frac{3}{10}}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{6}\right]$

113 $\sqrt[9]{27x^3}$; $\sqrt[8]{\frac{4a^2}{x^4}}$. $\left[x \geq 0, \sqrt[3]{3x}; x \neq 0, \sqrt[4]{\frac{2|a|}{x^2}}\right]$

114 $\sqrt[6]{a^3b^6}$; $\sqrt[10]{64x^4y^{10}}$. $[a \geq 0, \sqrt{ab^2}; \sqrt[5]{8x^2|y|^5}]$

115 $\sqrt[4]{16(a-1)^2}$; $\sqrt[6]{a^2(a+3)^4}$. $[\sqrt{4|a-1|}; \sqrt[3]{|a|(a+3)^2}]$

116 $\sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^6}}$; $\sqrt{x^2-6x+9}$. $\left[a>0, b \neq 0, \sqrt{\frac{2a}{b^2}}; |x-3|\right]$

117 $\sqrt{\frac{4}{9}a^6}$; $\sqrt{\frac{1}{64}a^8b^{10}}$. $\left[\frac{2}{3}|a|^3; \frac{1}{8}a^4|b|^5\right]$

118 $\sqrt{a^4-8a^2+16}$; $\sqrt{4a^2x^2}$. $[|a^2-4|; 2|ax|]$

119 $\sqrt{\frac{9a^6}{b^4}}$; $\sqrt[9]{\frac{216a^3b^6}{y^6}}$. $\left[\frac{3|a|^3}{b^2}, b \neq 0; a \geq 0, y \neq 0, \sqrt[3]{\frac{6ab^2}{y^2}}\right]$

120 $\sqrt[4]{a^4b^6}$; $\sqrt[8]{a^2-2a+1}$. $[\sqrt{a^2|b|^3}; \sqrt[4]{|a-1|}]$

121 $\sqrt[4]{\frac{4x^2+4y^2}{a^4}}$; $\sqrt[8]{\frac{a^4(a-4)^4}{a^2+4a+4}}$. $\left[a \neq 0, \text{non semplif.}; a \neq -2, \sqrt[4]{\frac{a^2(a-4)^2}{|a+2|}}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ▸ E34

122 $\sqrt[12]{\frac{24(x^8+4x^6+4x^4)}{54b^6(a^2+6a+9)}}$

123 $\sqrt[6]{\frac{x^2+2x+1}{4x^2+4x+1}}$; $\sqrt[6]{\frac{27a^6}{x^3+3x^2+3x+1}}$. $\left[x \neq -\frac{1}{2}, \sqrt[3]{\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|}; x>-1, \sqrt{\frac{3a^2}{x+1}}\right]$

124 $\sqrt[10]{\frac{32(a-1)^{10}}{(a+1)^5}}$; $\sqrt[4]{\frac{4(x^2-2x+1)(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}}$. $\left[a>-1, \sqrt{\frac{2(a-1)^2}{a+1}}; x \neq \pm 1, \sqrt{\left|\frac{2(x-1)}{x+1}\right|}\right]$

125 $\sqrt[6]{\frac{4(x^2+1-2x)x^2}{9(x+1)^2}}$; $\sqrt[8]{1-\frac{2ab-1}{a^2b^2}}$. $\left[x \neq -1, \sqrt[3]{\left|\frac{2x(x-1)}{3(x+1)}\right|}; a \neq 0, b \neq 0, \sqrt[4]{\frac{|ab-1|}{|ab|}}\right]$

126 Determina per quali valori di x sono soddisfatte le seguenti equazioni:

a) $\sqrt{4x^2} = 2x$; b) $\sqrt{x^2-10x+25} = 5-x$. [a) $x \geq 0$; b) $x \leq 5$]

La riduzione di radicali allo stesso indice

ESERCIZIO GUIDA

127 Riduciamo allo stesso indice i seguenti radicali, supponendo verificate le C.E.:
a) $\sqrt[4]{2a^2}$, $\sqrt[6]{3ab^3}$, $\sqrt[3]{a^2b^4}$; b) $\sqrt[6]{(a+b)^2}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{a+b^2}$.

a) Calcoliamo il minimo indice comune, ossia il m.c.m. fra gli indici: m.c.m.(4, 6, 3) = 12.
Applichiamo la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[4]{2a^2} \xrightarrow{\cdot 3} \sqrt[12]{(2a^2)^3} = \sqrt[12]{8a^6}; \quad \sqrt[6]{3ab^3} \xrightarrow{\cdot 2} \sqrt[12]{(3ab^3)^2} = \sqrt[12]{9a^2b^6}; \quad \sqrt[3]{a^2b^4} \xrightarrow{\cdot 4} \sqrt[12]{(a^2b^4)^4} = \sqrt[12]{a^8b^{16}}.$$

b) Calcoliamo il minimo indice comune:

m.c.m.(6, 2, 3) = 6.

Applichiamo la proprietà invariantiva: l'indice del primo radicale è già 6,

$$\sqrt[2]{a+b} \xrightarrow{\cdot 3} \sqrt[6]{(a+b)^3},$$

$$\sqrt[3]{a+b^2} \xrightarrow{\cdot 2} \sqrt[6]{(a+b^2)^2}.$$

Abbiamo ottenuto tre radicali di indice 6:

$$\sqrt[6]{(a+b)^2}, \qquad \sqrt[6]{(a+b)^3}, \qquad \sqrt[6]{(a+b^2)^2}.$$

Riduci allo stesso indice i seguenti radicali. (Qui e in seguito, se non vengono date indicazioni diverse, supponi verificate le C.E.)

128 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}$. $[\sqrt[12]{729}; \sqrt[12]{81}; \sqrt[12]{27}]$

129 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{5}$. $[\sqrt[6]{4}; \sqrt[6]{27}; \sqrt[6]{5}]$

130 $\sqrt[12]{52}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{7}$. $[\sqrt[12]{52}; \sqrt[12]{216}; \sqrt[12]{2401}]$

131 $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt{a}$. $[\sqrt[4]{25}; \sqrt[4]{7}; \sqrt[4]{a^2}]$

132 $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{2a^2}$. $[\sqrt[12]{a^9}; \sqrt[12]{a^4}; \sqrt[12]{64a^{12}}]$

133 $\sqrt[12]{3x^2y^3}$, $\sqrt[4]{2xy^2}$, $\sqrt[3]{3xy}$. $[\sqrt[12]{3x^2y^3}; \sqrt[12]{8x^3y^6}; \sqrt[12]{81x^4y^4}]$

134 $\sqrt[6]{(a-b)^2}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{a+b}$. $[\sqrt[6]{(a-b)^2}; \sqrt[6]{(a+b)^3}; \sqrt[6]{(a+b)^2}]$

135 $\sqrt[15]{25a^3b^4}$, $\sqrt[3]{3ab^2}$, $\sqrt[5]{5a^2b}$. $[\sqrt[15]{25a^3b^4}; \sqrt[15]{243a^5b^{10}}; \sqrt[15]{125a^6b^3}]$

136 $\sqrt{a+2}$, $\sqrt[3]{a^2+4a+4}$, $\sqrt[4]{(a+2)^3}$. $[\sqrt[12]{(a+2)^6}; \sqrt[12]{(a+2)^8}; \sqrt[12]{(a+2)^9}]$

137 $\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{y+1}}$, $\sqrt{\dfrac{a+b}{3}}$, $\sqrt[10]{\dfrac{z-t}{z+t}}$. $\left[\sqrt[10]{\dfrac{(x-1)^2}{(y+1)^2}}; \sqrt[10]{\dfrac{(a+b)^5}{243}}; \sqrt[10]{\dfrac{z-t}{z+t}}\right]$

138 $\sqrt{\frac{(x-y)^3}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)^4}$, $\sqrt[12]{\frac{a-b}{a+b}}$. $\left[\sqrt[12]{\frac{(x-y)^{18}}{64}}; \sqrt[12]{(a+b)^{16}}; \sqrt[12]{\frac{a-b}{a+b}}\right]$

139 $\sqrt{\frac{2xy}{x+1}}$, $\sqrt[6]{\frac{xz}{2x-1}}$, $\sqrt[4]{\frac{x^3y}{3}}$. $\left[\sqrt[12]{\frac{64x^6y^6}{(x+1)^6}}; \sqrt[12]{\frac{x^2z^2}{(2x-1)^2}}; \sqrt[12]{\frac{x^9y^3}{27}}\right]$

140 $\sqrt[3]{\frac{(2x-1)^t}{3}}$, $\sqrt[6]{\frac{4(x-1)}{2t}}$, $\sqrt{\frac{2x}{3a-1}}$. $\left[\sqrt[6]{\frac{(2x-1)^{2t}}{9}}; \sqrt[6]{\frac{4(x-1)}{2t}}; \sqrt[6]{\frac{8x^3}{(3a-1)^3}}\right]$

Il confronto di radicali

ESERCIZIO GUIDA

141 Confrontiamo i radicali $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$.

Riduciamo allo stesso indice:

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$
$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$
$$\sqrt[6]{7} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[12]{49}$$

$$27 < 49 < 81.$$

Mettiamo i radicali nello stesso ordine dei radicandi:

$$\sqrt[4]{3} < \sqrt[6]{7} < \sqrt[3]{3}.$$

Confronta i seguenti radicali.

142 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{12}$. $[\sqrt{2} < \sqrt[6]{12} < \sqrt[3]{5}]$

143 $\sqrt{90}$, $\sqrt[5]{80}$, $\sqrt[10]{120}$. $[\sqrt[10]{120} < \sqrt[5]{80} < \sqrt{90}]$

144 $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[6]{4}$. $\left[\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{\frac{3}{4}} < \sqrt[6]{4}\right]$

145 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{5}$. $[\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}]$

Disponi in ordine crescente i seguenti radicali dopo averli ridotti allo stesso indice.

146 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt{7}$.

147 $\sqrt{8}$, $\sqrt[4]{14}$, $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{28}$.

148 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali.

$\sqrt[4]{27}$, 2,2, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{18}$.

5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

Teoria a pag. 670

RIFLETTI SULLA TEORIA

149 VERO O FALSO?

a) Il prodotto di due radicali è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando il prodotto dei radicandi. V F

b) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ e $\forall y \in \mathbb{R}^+$. V F

c) Il prodotto dei radicali $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{7}$ è il radicale $\sqrt[12]{35}$. V F

150 VERO O FALSO?

a) È possibile trasportare fuori dal segno di radice un fattore solo se l'esponente è multiplo dell'indice. V F

b) Il fattore a^{16}, portato fuori dal segno di radice quadrata, diventa a^4. V F

c) I radicali $\sqrt[4]{a^{14}b^3}$ e $|a|^3\sqrt[4]{a^2b^3}$, con $b \in \mathbb{R}_0^+$, sono equivalenti. V F

ESERCIZI

La moltiplicazione fra radicali

ESERCIZIO GUIDA

151 Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni fra radicali:

a) $\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{2a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}}$ $(a \geq 0, b > 0)$.

a) Poiché **gli indici dei radicali sono uguali**, è sufficiente applicare il teorema del prodotto $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{5}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

b) Poiché **i radicali hanno indici diversi**, li riduciamo allo stesso indice:

$$\sqrt{\frac{2a}{b}} = \sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^3}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}} = \sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{36}}.$$

$$\sqrt{\frac{2a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}} = \sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{36}} =$$

Il prodotto è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$= \sqrt[6]{\frac{{}^{2}\cancel{8}a^3}{\cancel{b^3}} \cdot \frac{a^2 \cdot \cancel{b^4}}{\cancel{36}_{9}}} = \sqrt[6]{\frac{2a^5b}{9}}.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra radicali e semplifica i risultati. Supponi che siano verificate le C.E.

152 $\sqrt{48} \cdot \sqrt{3}$; $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$. [12; 3; 8]

153 $\sqrt[5]{12}\,\sqrt[5]{36}\,\sqrt[5]{18}$; $\sqrt[6]{2}\,\sqrt[6]{8}\,\sqrt[6]{32}$. $[6; \sqrt{8}]$

154 $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[3]{7}$. $[3; \sqrt[4]{7^3}]$

155 $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{a^3}\,\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{x}\,\sqrt[10]{x^3}\,\sqrt{x}$. $[\sqrt[3]{a^7}; x]$

156 $\sqrt[5]{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{35}{42}} \cdot \sqrt[5]{2}$; $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} \cdot \sqrt{6}$. $\left[\sqrt[5]{2}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$

157 $\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{8}{30}} \cdot \sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{\frac{8}{25}} \cdot \sqrt{\frac{3}{12}}$. $\left[\sqrt{2}; \sqrt{\frac{1}{30}}\right]$

158 $\sqrt[6]{\frac{27}{x^4}} \cdot \sqrt[6]{\frac{xy^5}{8}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{y^2}}$; $\sqrt{\frac{4(a-b)^2}{5a^2}} \cdot \sqrt{\frac{25ab^2}{12(a-b)^4}}$. $\left[\sqrt{\frac{3}{2}\frac{y}{x}}; \sqrt{\frac{5b^2}{3a(a-b)^2}}\right]$

159 $\sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$; $\sqrt[6]{\frac{8a}{27b^3}} \cdot \sqrt{\frac{3b}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4a}}$. $\left[\sqrt[6]{\frac{x^4y^3}{4}}; \sqrt[6]{\frac{1}{16a}}\right]$

La divisione fra radicali

ESERCIZIO GUIDA

160 Eseguiamo le divisioni fra radicali:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; b) $\sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt{2b}$ (con $a \geq 0$ e $b > 0$).

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}} =$

Portiamo allo stesso indice:

$$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} : \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} =$$

Applichiamo il teorema del quoziente $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$:

$$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{3-4}} =$$

$$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \sqrt[12]{2}.$$

b) $\sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt{2b} = \sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt[4]{(2b)^2} =$

$$= \sqrt[4]{24ab^2 : 4b^2} = \sqrt[4]{6a}.$$

Esegui le seguenti divisioni fra radicali. (Supponi che siano verificate le C.E.)

161 $\sqrt{9} : \sqrt{3}$; $\sqrt{7} : \sqrt{5}$; $\sqrt{8} : \sqrt{\frac{4}{3}}$. $\left[\sqrt{3}; \sqrt{\frac{7}{5}}; \sqrt{6}\right]$

162 $\sqrt{a^2} : \sqrt{a}$; $\sqrt{a} : \sqrt{b}$; $\sqrt{x^3} : \sqrt{\frac{x^2}{y}}$. $\left[\sqrt{a}; \sqrt{\frac{a}{b}}; \sqrt{xy}\right]$

163 $\sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{\frac{8}{5}}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} : \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[7]{32} : \sqrt[7]{2^6}$. $\left[\sqrt[4]{\frac{5}{4}}; 1; \sqrt[7]{\frac{1}{2}}\right]$

164 $\sqrt{5} : \sqrt[4]{\frac{25}{81}}$; $\sqrt[3]{2} : \sqrt[12]{\frac{8}{9}}$; $\sqrt{1+\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{4}{5}}$. $[3; \sqrt[12]{18}; \sqrt{2}]$

165 $\sqrt{x} : \sqrt[4]{\frac{x^5}{y^4}}$; $\sqrt[3]{a} : \sqrt[12]{\frac{a^3}{b^2}}$; $\sqrt{4} : \sqrt[4]{8}$. $\left[\sqrt[4]{\frac{y^4}{x^3}}; \sqrt[12]{ab^2}; \sqrt[4]{2}\right]$

Espressioni con moltiplicazioni e divisioni

Semplifica le seguenti espressioni contenenti moltiplicazioni e divisioni fra radicali. Supponi i radicandi non negativi.

166 $\sqrt{125} : \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{6}$ $[30]$

167 $(\sqrt{8} \cdot \sqrt{48}) : (\sqrt{24} \cdot \sqrt{6})$ $\left[\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$

168 $\sqrt[3]{162} : \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[6]{432}\right)$ $[\sqrt[6]{18}]$

169 $\sqrt[3]{a^6b^7} : \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^2b}$ $[\sqrt[6]{a^{15}b^{11}}]$

170 $\sqrt[3]{3a^2c} : \sqrt{27a} \cdot \sqrt[3]{9c^2}$ $[\sqrt[9]{729a^5c^9}]$

171 $\left(\sqrt[4]{\frac{x^5y}{z^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{z}{x^4y}}\right) \cdot \sqrt[4]{\frac{z}{x}}$ $[1]$

172 $\sqrt{\frac{x}{y}} : \sqrt{\frac{x^2}{z}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$ $\left[\sqrt{\frac{z}{x^2}}\right]$

173 $\sqrt{\frac{3ab^2}{c}} : \sqrt{\frac{9b^2}{c}} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$ $\left[\frac{a}{3}\right]$

174 $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} : \sqrt{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x-1}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{x}{(x-1)^3}}\right]$

175 $\sqrt{x-\frac{9}{x}} : \sqrt[3]{\frac{x+3}{2x}} : \sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{2x}}$ $[\sqrt[6]{8(x+3)}]$

176 $\sqrt{\frac{x^2-4x}{x^2-8x+16}} \cdot \sqrt{\frac{x-4}{x}} : \sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}$ $\left[\sqrt{\frac{x^2}{x^2-16}}\right]$

177 $\sqrt[3]{\frac{1}{x+y}} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \cdot \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}$ $[\sqrt[6]{x+y}]$

178 $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \cdot \sqrt{\frac{3(x^2-y^2)}{2(x-y)}}$ $\left[\sqrt{\frac{3(x-y)}{2}}\right]$

179 $\sqrt{\frac{12(x^2-2ax+a^2)}{5(x+a)^2}} \cdot \sqrt{\frac{10(x+a)^4}{4(x-a)}}$ $[\sqrt{6(x-a)(x+a)^2}]$

180 $\sqrt[4]{\frac{2y}{x+y}+1} \cdot \sqrt[8]{\frac{x+3y}{2x+2y}} : \sqrt{\frac{x+3y}{x+y}} : \sqrt[8]{x+y}$ $\left[\sqrt[8]{\frac{1}{2(x+3y)}}\right]$

181 $\sqrt{\frac{b^2-b-2}{b^2-1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b+1}{b+2}} : \sqrt[6]{\frac{b+1}{b^2-4}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{(b-2)^4(b+1)}{(b-1)^3(b+2)}}\right]$

Il trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

Nel sito: ► 17 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

182 Trasportiamo fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili nei seguenti radicali:

a) $\sqrt[3]{24}$; b) $\sqrt[4]{2^9}$; c) $\sqrt{\frac{3}{16}}$; d) $\sqrt{9a^8b}$ $(b \geq 0)$; e) $\sqrt[3]{a^5+3a^4+3a^3+a^2}$ $(a \geq -1)$.

a) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$.

b) $\sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^8} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}$.

c) $\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

d) $\sqrt{9a^8b} = \sqrt{3^2 \cdot a^8 \cdot b} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{a^8} \cdot \sqrt{b} = 3 \cdot a^4 \cdot \sqrt{b}$.

e) Raccogliamo a^2 e riconosciamo il cubo di un binomio:

$$\sqrt[3]{a^5+3a^4+3a^3+a^2} = \sqrt[3]{a^2(a^3+3a^2+3a+1)} = \sqrt[3]{a^2(a+1)^3} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{(a+1)^3}$$

Poiché per ipotesi $a \geq -1$, il fattore $(a+1)$ non è negativo:

$= (a+1) \cdot \sqrt[3]{a^2}$.

Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili supponendo che non siano negativi.

183 $\sqrt{18}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{40}$. $[3\sqrt{2}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{5}]$

184 $\sqrt{\frac{16}{3}}$; $\sqrt{\frac{5}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{5}}$. $\left[4 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}; \frac{1}{2}\sqrt{5}; \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right]$

185 $\sqrt{40}$; $\sqrt{243}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt[3]{16}$. $[2\sqrt{10}; 9\sqrt{3}; 5\sqrt{5}; 2\sqrt[3]{2}]$

186 $\sqrt[3]{96}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[4]{320}$; $\sqrt[4]{243}$. $[2\sqrt[3]{12}; 3\sqrt[3]{3}; 2\sqrt[4]{20}; 3\sqrt[4]{3}]$

187 $\sqrt{\frac{3}{8}}$; $\sqrt{\frac{72}{25}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{81}}$; $\sqrt[3]{\frac{33}{160}}$. $\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{6}{5}\sqrt{2}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{33}{20}}\right]$

188 $\sqrt[3]{320}$; $\sqrt[3]{375}$; $\sqrt[4]{112}$; $\sqrt[4]{405}$. $[4\sqrt[3]{5}; 5\sqrt[3]{3}; 2\sqrt[4]{7}; 3\sqrt[4]{5}]$

189 $\sqrt{5a^8bc^2}$; $\sqrt[3]{6ab^3c^6}$; $\sqrt[4]{\frac{2}{81}x^{12}}$; $\sqrt{2a^2b}$. $\left[a^4c\sqrt{5b}; bc^2\sqrt[3]{6a}; \frac{1}{3}x^3\sqrt[4]{2}; a\sqrt{2b}\right]$

190 $\sqrt[3]{a^3+3a^2+3a+1}$; $\sqrt[3]{a^6(x-y)^3}$; $\sqrt[3]{3b^6}$. $[a+1; a^2(x-y); b^2\sqrt[3]{3}]$

191 $\sqrt{x^2+x^2y}$; $\sqrt{4+4b^2}$; $\sqrt{x^2y-3x^2}$. $[x\sqrt{1+y}; 2\sqrt{1+b^2}; x\sqrt{y-3}]$

192 $\sqrt{x^6-2x^3b^3+b^6}$; $\sqrt{\frac{3a^2-18a+27}{9b^2x}}$. $\left[x^3-b^3; \frac{a-3}{b}\sqrt{\frac{1}{3x}}\right]$

193 $\sqrt[4]{\frac{a+3}{(a-3)^5}}$; $\sqrt{8(x^5-6x^4+9x^3)}$. $\left[\frac{1}{a-3}\sqrt[4]{\frac{a+3}{a-3}}; 2x(x-3)\sqrt{2x}\right]$

194 $\sqrt[3]{\frac{4}{27}a^3b^6}$; $\sqrt[4]{(a^2-1)(a-1)^3}$. $\left[\frac{1}{3}ab^2\sqrt[3]{4}; (a-1)\sqrt[4]{a+1}\right]$

195 $\sqrt{4x-12b}$; $\sqrt[4]{b^4+b^4x}$; $\sqrt[3]{(2-x)^2a^6b}$. $[2\sqrt{x-3b}; b\sqrt[4]{1+x}; a^2\sqrt[3]{(2-x)^2b}]$

196 $\sqrt{a^2-\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{7a}{25b^2}}$; $\sqrt[4]{x^4+x^4b^2}$. $\left[\frac{1}{3}\sqrt{9a^2-1}; \frac{1}{5b}\sqrt{7a}; x\sqrt[4]{1+b^2}\right]$

197 $\sqrt{\frac{a^5x^3}{48}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^4(x-1)^5}{27}}$. $\left[\frac{a^2x}{4}\sqrt{\frac{ax}{3}}; \frac{a(x-1)}{3}\sqrt[3]{a(x-1)^2}\right]$

198 $\sqrt[3]{\frac{54(2x+1)^4}{(x+3)^5}}$; $\sqrt{\frac{(x+2)^5x^3}{27}}$. $\left[\frac{3(2x+1)}{x+3}\sqrt[3]{\frac{2(2x+1)}{(x+3)^2}}; \frac{x(x+2)^2}{3}\sqrt{\frac{(x+2)x}{3}}\right]$

199 $\sqrt{\frac{80(a-2)^3a^4}{a^2-4}}$; $\sqrt{\frac{100x^3(x^2-1)^4}{(x-1)^3}}$. $\left[4a^2(a-2)\sqrt{\frac{5}{a+2}}; 10x(x+1)^2\sqrt{x(x-1)}\right]$

200 $\sqrt[3]{\frac{(a-1)^7a^4}{81}}$; $\sqrt{\frac{(x^2-2x)(x-2)^2}{(x^2-4x+4)^3}}$. $\left[\frac{a(a-1)^2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{a(a-1)}{3}}; \frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right]$

201 $\sqrt{\frac{(x^3+4x^2)^2}{(x^2-16)^3}}$; $\sqrt{\frac{18a^5(x+3)^3}{x^4}}$. $\left[\frac{x^2}{x-4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-16}}; \frac{3a^2(x+3)}{x^2}\sqrt{2a(x+3)}\right]$

Fattori trasportati fuori dal segno di radice e discussione

ESERCIZIO GUIDA

202 Trasportiamo fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili nei seguenti radicali:

a) $\sqrt{a^6b}$; b) $\sqrt[3]{125a^3b}$; c) $\sqrt[3]{8a^3b^9c^2}$; d) $\sqrt{2a^2-4a+2}$.

a) C.E. di $\sqrt{a^6 b}$: $b \geq 0$.

$\sqrt{a^6 b} = |a^3|\sqrt{b}$.

Introduciamo il valore assoluto di a^3 poiché le C.E. non garantiscono che sia $a^3 \geq 0$.

b) C.E. di $\sqrt[3]{125a^3 b}$: $ab \geq 0$.

$\sqrt[3]{125a^3 b} = \sqrt[3]{5^3 a^3 b} = 5|a|\sqrt[3]{|b|}$.

Introduciamo i valori assoluti di b e a poiché le C.E. non assicurano che il radicando sia ≥ 0 e per rendere vera l'uguaglianza.

c) C.E. di $\sqrt[3]{8a^3b^9c^2}$: $ab \geq 0$.

$\sqrt[3]{8a^3b^9c^2} = \sqrt[3]{2^3a^3b^9c^2} = 2ab^3\sqrt[3]{c^2}$.

I valori assoluti non occorrono, perché le C.E. garantiscono che $ab^3 \geq 0$, essendo $ab^3 = ab \cdot b^2 \geq 0$.

d) C.E. di $\sqrt{2a^2 - 4a + 2} = \sqrt{2(a-1)^2}$: $\forall a \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{2(a-1)^2} = |a-1|\sqrt{2}$.

Infatti le C.E. non garantiscono che sia $a - 1 \geq 0$ mentre $\sqrt{2(a-1)^2} \geq 0$.

COMPLETA **Nelle seguenti uguaglianze sono stati trasportati fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili senza mettere i necessari valori assoluti. Aggiungili dove mancano.**

203 $\sqrt{x^2} = x$; $\quad \sqrt{x^3} = x \cdot \sqrt{x}$; $\quad \sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$.

204 $\sqrt{x^4} = x^2$; $\quad \sqrt{x^5} = x^2 \cdot \sqrt{x}$; $\quad \sqrt[3]{a^6} = a^2$.

205 $\sqrt[3]{8a^3bc^3} = 2ac\sqrt[3]{b}$; $\quad \sqrt[3]{\dfrac{27a^3}{b^6c}} = \dfrac{3a}{b^2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{c}}$.

206 $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$; $\quad \sqrt{2a^4b^2} = a^2 \cdot b \cdot \sqrt{2}$;

$\sqrt{9a^4b} = 3a^2\sqrt{b}$.

207 $\sqrt[4]{a^4b^8c} = ab^2\sqrt[4]{c}$; $\quad \sqrt[5]{32a^5b} = 2a\sqrt[5]{b}$;

$\sqrt[6]{a^{12}b^6c} = a^2b\sqrt[6]{c}$.

208 $\sqrt[4]{\dfrac{16a^4b}{c^8}} = \dfrac{2a}{c^2}\sqrt[4]{b}$; $\quad \sqrt{\dfrac{4a^2d}{c^4}} = \dfrac{2a}{c^2}\sqrt{d}$.

209 $\sqrt{9(a-1)^2b} = 3(a-1)\sqrt{b}$;

$\sqrt{16a^2(b-1)^2} = 4a(b-1)$.

Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili.

210 $\sqrt{16b^4c}$; $\quad \sqrt[3]{27a^2b^{12}x^6}$; $\quad \sqrt[3]{12x^3y^2}$. $\quad [4b^2\sqrt{c};\ 3b^4x^2\sqrt[3]{a^2};\ x\sqrt[3]{12y^2}]$

211 $\sqrt{(a^2-2a+1)b}$; $\quad \sqrt[3]{6x^2y^3c^6}$; $\quad \sqrt[5]{10x^5y^4}$. $\quad [|a-1|\sqrt{b};\ yc^2\sqrt[3]{6x^2};\ x\sqrt[5]{10y^4}]$

212 $\sqrt[4]{16b^4c}$; $\quad \sqrt[3]{64x^2b^6y^9}$; $\quad \sqrt{81x^4y^6}$. $\quad [2|b|\sqrt[4]{c};\ 4b^2y^3\sqrt[3]{x^2};\ 9x^2|y|^3]$

213 $\sqrt{12a^2 + a^2x}$; $\quad \sqrt[3]{15x^3 + x^5}$. $\quad [|a|\sqrt{12+x};\ x\sqrt[3]{15+x^2}]$

214 $\sqrt{4x^2c}$; $\quad \sqrt[3]{81x^6y^{12}c^2}$. $\quad [2|x|\sqrt{c};\ 3x^2y^4\sqrt[3]{3c^2}]$

215 $\sqrt{a^2b^2 + 4b^2}$; $\quad \sqrt[4]{ab^3 - b^4}$. $\quad [|b|\sqrt{a^2+4};\ |b|\sqrt[4]{|a-b|}]$

216 $\sqrt{a^2b + b^2a^2}$; $\quad \sqrt[3]{27a^3 + 27}$. $\quad [|a|\sqrt{b+b^2};\ 3\sqrt[3]{a^3+1}]$

217 $\sqrt{16a^2(b^2-2b+1)}$; $\quad \sqrt{16(a^2x + 2ax + x)}$. $\quad [4|a(b-1)|;\ 4|a+1|\sqrt{x}]$

218 $\sqrt{(x^2-4)(x-2)}$; $\quad \sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^3-3x^2+3x-1}}$. $\quad \left[|x-2|\sqrt{x+2};\ \dfrac{\sqrt{x}}{|x-1|}\right]$

219 $\sqrt{\dfrac{4x^3-4x^2}{x^2+2x+1}}$; $\sqrt{\dfrac{81x^3}{x^2-5x}}$. $\left[2\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\sqrt{x-1}; \dfrac{9x}{\sqrt{x-5}}\right]$

220 $\sqrt{(x-1)^3}$; $\sqrt[4]{\dfrac{27a^5}{(x+3)^4}}$. $\left[(x-1)\sqrt{x-1}; \dfrac{a\sqrt[4]{27a}}{|x+3|}\right]$

221 $\sqrt{(x^2-9)(x^2+3x)x^3}$; $\sqrt{\dfrac{(1-x)^2 4x}{(x^2-1)(x^2+x)}}$. $\left[x^2(x+3)\sqrt{x-3}; \dfrac{2}{x+1}\sqrt{x-1}\right]$

222 $\sqrt{\dfrac{a^4b^4}{c(x-1)^6}}$; $\sqrt{3x^2-18x+27}$. $\left[\dfrac{a^2b^2}{|x-1|^3}\sqrt{\dfrac{1}{c}}; |x-3|\sqrt{3}\right]$

223 $\sqrt[3]{x^5+3x^4+3x^3+x^2}$; $\sqrt{a^5+a^4}$. $[(x+1)\sqrt[3]{x^2}; a^2\sqrt{a+1}]$

Moltiplicare, dividere e portare fuori dal segno di radice

Dopo aver eseguito le moltiplicazioni e divisioni indicate, trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili. Supponi che i fattori che compongono i radicandi siano positivi.

224 $\sqrt{24}\cdot\sqrt{30}$; $\sqrt{\dfrac{5}{4}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{125}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$. $\left[12\sqrt{5}; \dfrac{1}{10}\sqrt{3}; \dfrac{3}{2}\right]$

225 $\sqrt[4]{4a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}x^2}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1}{27}x^4y^3}$. $\left[2a\sqrt[12]{4a^5b^{10}}; \dfrac{x}{3}\sqrt[15]{\dfrac{x^7y^9}{81}}\right]$

226 $\sqrt{\dfrac{x-2y}{a^2-4b^2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a-2b}{x-2y}}\cdot\sqrt[6]{(x-2y)^5}$ $\left[(x-2y)\sqrt[6]{\dfrac{1}{(a-2b)(a+2b)^3}}\right]$

227 $\sqrt[6]{\dfrac{1}{x-1}}\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2} : \sqrt{\dfrac{x^3+3x-3x^2-1}{x+1}}$ $\left[\dfrac{x+1}{x-1}\sqrt[6]{x+1}\right]$

228 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a-1}}\cdot\sqrt{\dfrac{4a^2-1}{(2a-1)^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2a-1}{2a+1}}$ $\left[\dfrac{\sqrt[6]{2a+1}}{2a-1}\right]$

229 $\sqrt[6]{\dfrac{a^2-1}{a}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}+a^2+2}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1}{a^4(a^2-1)^4}}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{a^4-1}}$ $\left[\dfrac{1}{a(a^2-1)}\sqrt[6]{a^2+1}\right]$

230 $\sqrt[3]{a+2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2-4a+4}}\cdot\sqrt[3]{(a^2-4)\cdot\dfrac{a^3-8}{a^2+2a+4}}$ $[\sqrt[3]{(a+2)^2}]$

BRAVI SI DIVENTA ► E35

231 $\sqrt[3]{\dfrac{9}{x^2+6x+9}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{9(x^2-9)^4}{x}} : \sqrt{\dfrac{x^3-3x^2}{3}}$

Trova le condizioni di esistenza dei radicali e, dopo aver eseguito le moltiplicazioni indicate, trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili; metti il valore assoluto dove necessario.

232 $\sqrt[4]{a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{a^7b^9}$; $\sqrt[6]{b^3c}\cdot\sqrt[6]{3b^3c^5}$; $\sqrt[5]{2x^3y^4}\cdot\sqrt[5]{16x^3y^3}$. $[a^2b^3\sqrt[4]{a}; bc\sqrt[6]{3}; 2xy\sqrt[5]{xy^2}]$

233 $\sqrt[2]{\dfrac{6y}{x^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x}{9y^3}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{xy^5}{4}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2y^2}{x^8}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{8a^4}{b^4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{4b^2}{a^2}}$. $\left[\dfrac{2}{|x|}\sqrt[6]{\dfrac{2}{3xy^3}}; \dfrac{|y|}{x^2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}; 2\sqrt[6]{\left|\dfrac{a}{b}\right|}\right]$

234 $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+y}}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}}$; $\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}}$. $\left[\dfrac{1}{x+y}\sqrt{x-3}; \dfrac{|x-1|}{x}\cdot\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}}\right)\right]$

6. La potenza e la radice di un radicale

→ Teoria a pag. 673

RIFLETTI SULLA TEORIA

235 VERO O FALSO?

a) Se $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $x, y, z \in \mathbb{N} - \{0\}$, allora $(\sqrt[x]{a^y})^z = \sqrt[xz]{a^{yz}}$. V F

b) $(\sqrt[4]{3})^7 = 3\sqrt[4]{27}$. V F

c) La radice cubica della radice quinta di a è equivalente alla radice ottava di a. V F

236 È vera l'uguaglianza $(\sqrt[6]{a^3})^2 = a$, con $a \in \mathbb{R}_0^+$? Motiva la risposta e fai altri esempi.

237 Perché l'uguaglianza $-7\sqrt{z} = \sqrt{49z}$, con $z > 0$, è *falsa*? Correggila in modo che diventi vera.

ESERCIZI

La potenza di un radicale

ESERCIZIO GUIDA

238 Calcoliamo le seguenti potenze di radicali:

a) $(\sqrt[3]{2})^5$; b) $(\sqrt[5]{2xy^2})^3 \quad (x \geq 0)$; c) $(\sqrt[6]{5ab^2})^3$.

Applichiamo in tutti i casi il teorema della potenza: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

a) $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$.

b) $(\sqrt[5]{2xy^2})^3 = \sqrt[5]{(2xy^2)^3} = \sqrt[5]{8x^3y^6} = |y|\sqrt[5]{8x^3|y|}$.

c) $(\sqrt[6]{5ab^2})^3 = \sqrt{5ab^2} = |b|\sqrt{5a}$.

Calcola le seguenti potenze di radicali.

239 $(\sqrt{3})^3$; $(\sqrt[6]{2})^3$; $(\sqrt[5]{2})^2$; $(\sqrt[4]{3})^2$. $[3\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt[5]{4}; \sqrt{3}]$

240 $(\sqrt{12})^3$; $(\sqrt[3]{9})^6$; $(\sqrt[10]{7})^2$; $(\sqrt[5]{3})^2$. $[24\sqrt{3}; 81; \sqrt[5]{7}; \sqrt[5]{9}]$

241 $(\sqrt{2a^5b})^3$; $(\sqrt[3]{3x^4y})^2$; $(\sqrt[6]{bc^3})^4$. $[2a^7b\sqrt{2ab}; x^2\sqrt[3]{9x^2y^2}; c^2\sqrt[3]{b^2}]$

242 $[\sqrt[3]{(x+3y)(x-y)}]^2$; $(\sqrt[3]{2x-3y})^2$. $[\sqrt[3]{(x+3y)^2(x-y)^2}; \sqrt[3]{(2x-3y)^2}]$

243 $(\sqrt[3]{2a-b})^4$; $\left(\sqrt{\dfrac{3a-x}{a+b}}\right)^3$. $\left[(2a-b)\sqrt[3]{2a-b}; \dfrac{3a-x}{a+b}\sqrt{\dfrac{3a-x}{a+b}}\right]$

244 $[(x+2)\sqrt{3}]^2$; $[(3x-y)\sqrt{a}]^3$. $[3(x+2)^2; a\sqrt{a}(3x-y)^3]$

Espressioni con potenze di radicali

Semplifica le seguenti espressioni con potenze di radicali. Supponi positivi i radicandi letterali.

245 $\left(\sqrt[3]{\frac{9}{16}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{16}{3}}\right)^2$; $\quad (\sqrt{5})^3 : (\sqrt[3]{25})^2$; $\quad \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 : \sqrt{\frac{1}{27}}$. $\quad [\sqrt[3]{9}; \sqrt[6]{5}; \sqrt[6]{243}]$

246 $(\sqrt[4]{a})^2 \cdot (\sqrt[3]{a^2})^3 \cdot \sqrt{a}$; $\quad \left[(a-2b) : \sqrt{\frac{a-2b}{3a^2}}\right]^2$. $\quad [a^3; 3a^2(a-2b)]$

247 $\left(\sqrt[6]{1-\frac{x-3y}{x+y}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x-y}{4y}}\right)^3 : \sqrt{\frac{1}{x+y}}$ $\quad [\sqrt{x-y}]$

248 $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1} : \sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^2 : \sqrt[3]{\left(\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)^2}$ $\quad [1]$

249 $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2} : \sqrt[3]{2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\right)^2 : \sqrt[3]{\frac{(a-b)^4}{a}}$ $\quad \left[\sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}}\right]$

La radice di un radicale

ESERCIZIO GUIDA

250 Eseguiamo la radice di radicale: $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$.

Applichiamo il teorema della radice di una radice:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

La radice che otteniamo ha come indice il prodotto degli indici delle singole radici: $2 \cdot 3 = 6$.

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}.$$

Esegui le seguenti radici di radicali.

251 $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$; $\quad \sqrt{\sqrt[5]{3}}$; $\quad \sqrt{\sqrt{6}}$.

252 $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; $\quad \sqrt[6]{\sqrt{3}}$; $\quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

253 $\sqrt{\sqrt[3]{2a}}$; $\quad \sqrt{\sqrt[3]{3a^2b^3}}$.

254 $\sqrt[3]{\sqrt{6ax}}$; $\quad \sqrt[5]{\sqrt{9a^2b}}$.

255 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^5b^3}}}$; $\quad \sqrt{\sqrt[3]{a^3b^6}}$.

256 $\sqrt[5]{\sqrt[5]{x^2}}$; $\quad \sqrt[8]{\sqrt{2a^{10}}}$.

Il trasporto di un fattore dentro il segno di radice

ESERCIZIO GUIDA

257 Trasportiamo dentro il segno di radice un fattore:

a) $-\frac{1}{3}\sqrt{12}$; b) $a+2\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$; c) $(a-6)\sqrt{a-1}$ $(a \geq 6)$.

a) Poiché non possiamo portare dentro il segno di radice fattori negativi, portiamo dentro $\frac{1}{3}$, mentre il segno $-$ rimane fuori.

$$-\frac{1}{3}\sqrt{12} = -\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 4\cdot 3} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{3^{\cancel{2}}}\cdot 4\cdot \cancel{3}} = -\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

b) Il fattore da trasportare è soltanto 2:

$$a+2\sqrt[4]{\frac{3}{8}} = a+\sqrt[4]{2^{\cancel{4}\,1}\cdot\frac{3}{2^{\cancel{3}}}} = a+\sqrt[4]{6}.$$

c) Il fattore da trasportare è $a-6$, che, per la condizione posta, non è negativo:

$$(a-6)\sqrt{a-1} = \sqrt{(a-6)^2(a-1)}.$$

Trasporta i fattori dentro il segno di radice, supponendoli non negativi.

258 $3\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $-2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt[4]{7}$.

259 $(-2)\sqrt{7}$; $2\sqrt{1-\frac{1}{4}}$; $3+2\sqrt{3}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)\sqrt{18}$; $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}+1}$.

260 $2\sqrt{\frac{5}{54}}$; $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{8}}$; $-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{9}{5}}$; $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{8}}$.

261 $3\sqrt{a}$; $2\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2b}}$; $\frac{2}{3}\sqrt{18a}$; $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{ab^2}$.

262 $a-2\sqrt[6]{ab}$; $b^2-2\sqrt[5]{b^2}$; $a\sqrt{a}$; $x^2\sqrt{x^3}$; $a^2\sqrt{\frac{2}{a}}$.

263 $2\sqrt{a-1}$; $\frac{1}{a}\sqrt[5]{3a^3}$; $\left(-\frac{a}{2}\right)\sqrt{4a}$; $b^3\sqrt{\frac{3}{b^2}}$; $-x\sqrt{2x}$.

264 $(x-1)\sqrt{5}$; $a^2b\sqrt[3]{ab^2}$; $a^2\sqrt[3]{a^2-1}$.

265 $3ab\sqrt{\frac{7}{18a^3b^2}}$; $2+a\sqrt{\frac{1}{a^2+2a}}$. $\left[\sqrt{\frac{7}{2a}};\ 2+\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right]$

266 $(a-2)\sqrt[3]{\frac{1}{a^2-4a+4}}$; $(2+a)\sqrt{\frac{1}{a^2+2a}}$. $\left[\sqrt[3]{a-2};\ \sqrt{\frac{2+a}{a}}\right]$

267 $\frac{5}{a}\sqrt{\frac{a^2+a}{10}}$; $\frac{2}{a-5}\sqrt{5a}$. $\left[\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{a+1}{a}};\ \sqrt{\frac{20a}{(a-5)^2}}\right]$

268 $\frac{a+1}{a-2}\sqrt{\frac{a^2-7a+10}{a^2-2a-3}}$; $\frac{1}{(a-2)}\sqrt{\frac{a^2-2a}{a-1}}$. $\left[\sqrt{\frac{(a+1)(a-5)}{(a-2)(a-3)}};\ \sqrt{\frac{a}{(a-2)(a-1)}}\right]$

269 $\frac{a+2}{a+1}\sqrt{\frac{4a+6}{a+2}-2}$; $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2+a}{a-2}-a}$. $\left[\sqrt{\frac{2(a+2)}{a+1}};\ \sqrt{\frac{3}{a(a-2)}}\right]$

La radice di un radicale con trasporto di un fattore dentro radice

ESERCIZIO GUIDA

270 Poniamo sotto forma di unico radicale i seguenti radicali:

a) $\sqrt{5\sqrt[3]{\dfrac{3}{50}}}$; b) $\sqrt{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}$ $(x \geq 1)$.

a) $\sqrt{5\sqrt[3]{\dfrac{3}{50}}} =$

Trasportiamo il fattore 5:

$= \sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{5^3 \cdot 3}{2 \cdot 5^2}}} =$

Semplifichiamo la frazione e moltiplichiamo gli indici dei radicali, applicando il teorema della radice di un radicale:

$= \sqrt[6]{\dfrac{15}{2}}$.

b) $\sqrt{(x-1)\sqrt[3]{x+1}} =$

$= \sqrt{\sqrt[3]{(x-1)^3(x+1)}} =$

$= \sqrt[6]{(x-1)^3(x+1)}$.

Determina le C.E. e poni sotto forma di un unico radicale.

271 $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; $\sqrt[3]{2\sqrt{4}}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

272 $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\sqrt{3x}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{2ab^2}}$.

273 $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}}}} \cdot \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt{\dfrac{1}{a}}}}$

274 $\sqrt[3]{2\sqrt{4\sqrt{2}}}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt{9}}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}\sqrt{4\sqrt{2}}}$.

275 $\sqrt[3]{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt[3]{4}}$; $\sqrt[6]{(3\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}$.

276 $\sqrt[4]{2\sqrt{5}}$; $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{9}}$; $\sqrt[3]{3\sqrt{12}}$.

277 $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; $\sqrt{a\sqrt{a^3}}$; $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$.

278 $\sqrt{x\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$ $[\sqrt[18]{x^{29}}]$

279 $\sqrt[7]{x\sqrt{\dfrac{1}{x}}} \cdot \sqrt[5]{x^3\sqrt{\dfrac{1}{x^5}}} \cdot \sqrt[7]{\dfrac{1}{x}}$ $[\sqrt[35]{x}]$

280 $\sqrt{\dfrac{1}{a}\sqrt{a^3-a^2}}$ $[\sqrt[4]{a-1}]$

281 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x+3}\sqrt{x+3}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{1}{x+3}}\right]$

7. L'addizione e la sottrazione di radicali

Teoria a pag. 675

RIFLETTI SULLA TEORIA

282 **VERO O FALSO?**

a) I radicali $4\sqrt{5}$ e $4\sqrt[3]{5}$ non sono simili. V F

b) Tutti i radicali quadratici sono simili tra loro. V F

c) I radicali $2\sqrt{75}$ e $5\sqrt{48}$ possono essere trasformati in radicali simili. V F

d) $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$. V F

283 **TEST** $8\sqrt{3}$ è il risultato di una sola delle seguenti espressioni. Quale?

A $2 + 6\sqrt{3}$

B $14\sqrt{3} - 3\sqrt{12}$

C $\sqrt{3} + 7\sqrt[4]{3}$

D $\sqrt{27} - 11\sqrt{3}$

E $\sqrt{18} - 10\sqrt{3}$

284 TEST Dati i tre radicali $\sqrt{x^5}$, $-6\sqrt{x^3}$ e $9\sqrt{x}$, con $x > 0$, una sola delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

A La loro somma vale $\sqrt{x^5 - 36x^3 + 81x}$.
B I radicali non sono simili poiché hanno i coefficienti diversi.
C I radicali sono simili perché sono irriducibili.
D La loro somma vale $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$.
E Tutti e tre possono essere trasformati in radicali simili e la loro somma vale: $(x-3)^2\sqrt{x}$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

285 Calcoliamo le seguenti somme algebriche di radicali:

a) $5\sqrt{18} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{98}$; b) $3\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + 2\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b}$ $(a \geq 0; b \geq 0)$;
c) $3\sqrt{a^3 - 2a^2} - \sqrt{a^3 - 6a^2 + 12a - 8}$.

a) $5\sqrt{18} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{98} =$

Scomponiamo in fattori i radicandi e portiamo fuori dal segno di radice:

$$= 5\sqrt{2 \cdot 3^2} - 7\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5^2} - \sqrt{2 \cdot 7^2} =$$
$$= \underline{15\sqrt{2}} - \underline{14\sqrt{3}} + \underline{5\sqrt{3}} - \underline{7\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} - 9\sqrt{3}.$$

b) Segniamo i radicali simili:

$$\underline{3\sqrt{a}} - \underline{2\sqrt{b}} + \underline{2\sqrt{a}} + \underline{\frac{1}{2}\sqrt{b}} =$$

Raccogliamo i radicali facendo precedere ogni parentesi dal segno +:

$$= (3+2) \cdot \sqrt{a} + \left(-2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{b} =$$

Calcoliamo la somma:

$$= 5\sqrt{a} + \left(-\frac{3}{2}\right)\sqrt{b} = 5\sqrt{a} - \frac{3}{2}\sqrt{b}.$$

c) Scomponiamo in fattori entrambi i radicandi:

$$3\sqrt{a^2(a-2)} - \sqrt{(a-2)^3} =$$

C.E.: $a \geq 2$ per entrambi i radicali.
Portiamo fuori i fattori possibili:

$$= 3a\sqrt{a-2} - (a-2)\sqrt{a-2} =$$

Sommiamo i radicali, visto che sono simili:

$$= [3a - (a-2)]\sqrt{a-2} =$$
$$= (3a - a + 2)\sqrt{a-2} =$$
$$= (2a+2)\sqrt{a-2}.$$

Calcola le seguenti somme algebriche di radicali. Supponi positivi i radicandi letterali.

286 $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$; $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$. $[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

287 $6\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3}$; $11\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - (8\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$. $[7\sqrt[3]{3}; 3(\sqrt{5} + \sqrt{2})]$

288 $5\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - [2\sqrt{3} - (4\sqrt{7} - 3\sqrt{3})]$; $3\sqrt{48} + 2\sqrt{32} + \sqrt{98} - (4\sqrt{27} + \sqrt{450})$. $[7\sqrt{7}; 0]$

289 $2\sqrt[3]{54} - \sqrt[4]{243} + 3\sqrt[4]{48} - \sqrt[3]{250}$; $2\sqrt{\frac{27}{8}} + 5\sqrt{\frac{3}{50}} + 7\sqrt{\frac{27}{98}} - 5\sqrt{\frac{147}{50}}$. $[\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[4]{3}; 0]$

290 $\sqrt{75}+3\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{50}$; $\quad 3\sqrt{128}-2\sqrt{72}-(2\sqrt{50}+\sqrt{8})$. $\quad [\sqrt{3}-\sqrt{2}; 0]$

291 $\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}$; $\quad \sqrt{b}-\sqrt{b}$; $\quad \sqrt{a}-2\sqrt{a}$. $\quad [3\sqrt{a}; 0; -\sqrt{a}]$

292 $\sqrt{a^3}-3\sqrt{a}$; $\quad \sqrt{x-1}+3\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}$. $\quad [(a-3)\cdot\sqrt{a}; 2\sqrt{x-1}]$

293 $\sqrt{a^5}-3a^2\sqrt{a}+2a^2\sqrt{a}$; $\quad \frac{5}{4}\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}+\frac{3}{4}\sqrt{b}-\frac{2}{8}\sqrt{a}$. $\quad \left[0; \sqrt{a}+\frac{1}{4}\sqrt{b}\right]$

294 $2\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{7}{3}\sqrt{x}$ $\quad [-\sqrt{x}+\sqrt{y}]$

295 $-\frac{1}{3}\sqrt{a}+2\sqrt{a}-3\sqrt{b}-\frac{1}{2}\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ $\quad \left[\frac{7}{6}\sqrt{a}-\sqrt{b}\right]$

296 $-5\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{1}{3}\sqrt{ab}+\frac{2}{3}\sqrt{ab}$ $\quad \left[-\frac{11}{2}\sqrt{a}+\sqrt{ab}\right]$

297 $2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}+\frac{3}{4}\sqrt{b}-\frac{1}{4}\sqrt{a}$ $\quad \left[\frac{7}{4}\sqrt{a}+\frac{1}{4}\sqrt{b}\right]$

298 $(2x+3y)\sqrt{xy}-\sqrt{4x^3y}-\sqrt{9xy^3}$ $\quad [0]$

299 $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{a^4-a^3b}-\sqrt[3]{ab^3-b^4}$ $\quad [(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}]$

300 $\sqrt{32a+48b}+\sqrt{18a+27b}-\sqrt{50a+75b}$ $\quad [2\sqrt{2a+3b}]$

301 $\sqrt[4]{b^4+ab^4}+\sqrt[3]{a^3+a^3b}-\sqrt[8]{1+a^2+2a}-a\sqrt[3]{1+b}$ $\quad (b\geq 0)$ $\quad [(b-1)\sqrt[4]{a+1}]$

302 $\sqrt{a^4b}+2\sqrt{b}-\sqrt{a^2b-2ab+b}-\sqrt{a^4b+2a^2b+b}$ $\quad (a\geq 1)$ $\quad [(2-a)\sqrt{b}]$

303 $\sqrt{x^3y}-\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}-\sqrt{x^3y-2x^2y+xy}$ $\quad (x\geq 1)$ $\quad [(3-xy)\sqrt{xy}]$

304 $\sqrt{1-3a+3a^2-a^3}+\sqrt[4]{1-2a+a^2}-\sqrt{a^2-a^3}-\sqrt{1-a}$ $\quad (a\leq 1)$ $\quad [(1-a-|a|)\sqrt{1-a}]$

305 $\sqrt{2x^2+4xy+2y^2}+\sqrt{3y^2+3x^2+6xy}-\sqrt{10xy+5x^2+5y^2}$ $\quad [|x+y|(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})]$

Utilizzando anche le regole dei prodotti notevoli semplifica le seguenti espressioni.

306 $3(2+\sqrt{6})$; $\quad 3\sqrt{5}(1+\sqrt{5})$. $\quad [6+3\sqrt{6}; 3\sqrt{5}+15]$

307 $5\sqrt{2}(3+\sqrt{2})$; $\quad 2\sqrt{3}(3+2\sqrt{5})$. $\quad [15\sqrt{2}+10; 6\sqrt{3}+4\sqrt{15}]$

308 $(2\sqrt{3}-2)(\sqrt{2}+1)$; $\quad (3\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)$. $\quad [2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2; 3\sqrt{10}-\sqrt{6}-3\sqrt{5}+\sqrt{3}]$

309 $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)$; $\quad (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)$. $\quad [x+5\sqrt{x}+6; x-3\sqrt{x}-4]$

310 $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)$; $\quad (\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+2a)$. $\quad [x-4\sqrt{x}-5; x+a\sqrt{x}-2a^2]$

311 $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$; $\quad (1-\sqrt{3})^2$. $\quad [-1; 4-2\sqrt{3}]$

312 $(1+\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{a}+2)^2$. $[3+2\sqrt{2};\ a+4\sqrt{a}+4]$

313 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; $(1+\sqrt{2})^3$. $[1;\ 7+5\sqrt{2}]$

314 $(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)$; $(1-\sqrt{3})^3$. $[a-4;\ 10-6\sqrt{3}]$

315 $(\sqrt{3a}+\sqrt{c})^2$; $(3+\sqrt{3})^2$. $[3a+2\sqrt{3ac}+c;\ 12+6\sqrt{3}]$

316 $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$; $(\sqrt{3x}-\sqrt{2a})(\sqrt{3x}+\sqrt{2a})$. $[4x-y;\ 3x-2a]$

317 $(3\sqrt{x}-y)(3\sqrt{x}+y)$; $(2x-\sqrt{3b})(2x+\sqrt{3b})$. $[9x-y^2;\ 4x^2-3b]$

318 $(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})$; $(\sqrt{5x}-2\sqrt{y})(\sqrt{5x}+2\sqrt{y})$. $[2a-3b;\ 5x^2-4y]$

319 $(2-\sqrt{3})^2$; $(3a-\sqrt{2x})^2$. $[7-4\sqrt{3};\ 9a^2+2x-6a\sqrt{2x}]$

320 $(a+\sqrt{2a})^3$; $(2x+\sqrt{3})^2$. $[a^3+6a^2+\sqrt{2a}(3a^2+2a);\ 4x^2+3+4\sqrt{3}x]$

321 $-2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{6}+1)^2$ $[7+2\sqrt{2}]$

322 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-2)^2+\sqrt{48}$ $[6]$

323 $[(3\sqrt{2}-2)(3\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2})^3-14]:\sqrt{32}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

RIEPILOGO I RADICALI E LE OPERAZIONI

TEST

324 Sono dati i radicali $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{3}$. Fra le seguenti relazioni, una sola è *corretta*. Quale?

- A $\sqrt{2}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{3}$
- B $\sqrt{2}<\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{5}$
- C $\sqrt[4]{3}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{5}$
- D $\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{3}<\sqrt{2}$
- E $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{2}$

325 Se $a>3$, il radicale $(3-a)\sqrt{2}$ è equivalente a:

- A $\sqrt{6-2a}$.
- B $\sqrt{2a^2+18}$.
- C $\sqrt{2a^2-12a+18}$.
- D $-\sqrt{6-2a}$.
- E $-\sqrt{2a^2-12a+18}$.

326 Il prodotto del radicale $\sqrt[6]{ab}$ per il radicale x è $\sqrt[12]{a^{11}b^5}$. Qual è il radicale x?

- A $\sqrt{a^{10}b^4}$
- B $\sqrt[6]{a^{10}b^4}$
- C $\sqrt[4]{a^3b}$
- D a^9b^3
- E $\sqrt[9]{a^3b}$

VERO O FALSO?

327
a) La radice terza del triplo di a è uguale ad a. V F

b) Il doppio della radice quadrata di a è uguale alla radice quadrata del quadruplo di a. V F

c) La radice terza del cubo di a è uguale ad a. V F

d) La radice quarta di 16 è 2. V F

e) La radice cubica di 27 è 9. V F

328 a) La radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8. V F

b) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F

c) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F

d) Dato un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata. V F

e) La somma di due radicali letterali simili è un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati. V F

Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le C.E. (Negli esercizi in cui non sono poste condizioni sulle espressioni letterali, supponi che i fattori che compongono i radicandi siano non negativi.)

329 $\sqrt{b^3} - \sqrt{b}$ $\quad [(b-1)\cdot\sqrt{b}]$

330 $\sqrt[5]{a^2b} : \sqrt[10]{2a} \cdot \sqrt[2]{3ab}$ $\quad \left[\sqrt[10]{\dfrac{243a^8b^7}{2}}\right]$

331 $\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + 2\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\quad [(a+2)\sqrt{a} + (1-b)\sqrt{b}]$

332 $3\sqrt{x} - \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \sqrt{y} - \dfrac{7}{3}\sqrt{x}$ $\quad [\sqrt{y}]$

333 $\dfrac{1}{2}\sqrt{a} - \dfrac{4}{5}\sqrt{b} - \sqrt{a} + 0{,}4\cdot\sqrt{b}$ $\quad \left[-\dfrac{1}{2}\sqrt{a} - \dfrac{2}{5}\sqrt{b}\right]$

334 $\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} + 5\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}$ $\quad [\sqrt[4]{2} + 12\sqrt[3]{2}]$

335 $(4+\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2}-1)^2 - 3(4\sqrt{2}+2)$ $\quad [3]$

336 $[(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1) - (\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}-4)^2] : 2$ $\quad [5\sqrt{5}-4]$

337 $6\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} - 7\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} + 9\sqrt{b} + \sqrt{a}$ $\quad [-\sqrt{ab} + 9\sqrt{b}]$

338 $\sqrt{\dfrac{3ab^2}{c}} : \sqrt{\dfrac{9b^2}{c}} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{3}}$ $\quad \left[\dfrac{a}{3}\right]$

339 $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{3y}} : \sqrt{\dfrac{x}{y}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{xy^2}{3}}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\dfrac{4x^2y^3}{27}}\right]$

340 $\sqrt{2(a-b)} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{1}{4a-4b}}}$ $\quad [\sqrt[6]{2(a-b)^2}]$

341 $\sqrt{\sqrt{(2x+3)^3}} : \sqrt[6]{2x+3}$ $\quad [\sqrt[12]{(2x+3)^7}]$

342 $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^3} - \dfrac{1}{y^2}} + \sqrt[3]{xy^3 - y^4} - \sqrt[3]{8x-8y}$ $\quad \left[\dfrac{(1-y)^2}{y}\sqrt[3]{x-y}\right]$

343 $\sqrt[4]{\dfrac{a^2-b^2}{x^4-y^4}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{(a-b)^3}{(x-y)^3}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{x+y}{a-2b}}$ $\quad \left[\left(\dfrac{a-b}{x-y}\right)\sqrt[4]{\dfrac{a+b}{(x^2+y^2)(a-2b)}}\right]$

344 $\sqrt{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}} \cdot \sqrt{\dfrac{a^2-b(a-b)}{a+b}} : \sqrt{\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}}$ $\quad \left[\dfrac{1}{a-b}\sqrt{a+b}\right]$

345 $\sqrt{\dfrac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}}+\sqrt{\dfrac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}}-\sqrt{\dfrac{a^3}{a^2+6a+9}}$ $[\sqrt{a}]$

346 $\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2+a-2}}:\sqrt[3]{\dfrac{a^2-4}{a+1}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{a+2}{a^2+2a+1}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{(a+1)^3}{(a+2)^4(a-2)^2}}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E36

347 $\left(\sqrt{\dfrac{x^2+3x-4}{x^2(x-1)}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{(x+4)^2}}+8\sqrt[3]{x}:\sqrt[6]{x+4}\right)\cdot\sqrt[6]{x+4}$

8. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

Teoria a pag. 676

RIFLETTI SULLA TEORIA

348 VERO O FALSO?

a) La razionalizzazione del denominatore di una frazione è basata sulla proprietà invariantiva dei radicali. V F

b) Le espressioni $\dfrac{4}{\sqrt{5}+3}$ e $3-\sqrt{5}$ sono equivalenti. V F

c) Per razionalizzare il denominatore della frazione $\dfrac{5}{\sqrt{12}}$ è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{3}$. V F

349 I radicali $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ e $\sqrt{45}$ possono essere trasformati in radicali simili? Motiva la risposta.

350 Per razionalizzare il denominatore della frazione $\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$, è corretto moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x-1}$? Perché?

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

351 Razionalizziamo i denominatori delle seguenti frazioni:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$; c) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}}$ (con $a>-b$); d) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (con $a>0, b>0$).

a) Moltiplichiamo numeratore e denominatore per la radice presente nel denominatore:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}=\sqrt{3}.$$

b) $$\frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Infatti:

$$\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^2\cdot 2}=\sqrt[3]{2^{2+1}}=\sqrt[3]{2^3}=2.$$

c) Il denominatore è un unico radicale che ha per radicando un binomio; moltiplichiamo per tale radicale:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+b}} = \frac{(a+b)\cdot\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}} = \frac{\cancel{(a+b)}\sqrt{a+b}}{\cancel{a+b}} = \sqrt{a+b}.$$

d) Quando al denominatore compare la somma di due termini di cui almeno uno è una radice quadrata, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per la differenza dei due termini.
Se compare una differenza, moltiplichiamo per la somma, in modo da poter utilizzare in entrambi i casi il prodotto notevole $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni.

352 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{27}}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

353 $\frac{20}{\sqrt{10}}$; $\frac{5}{\sqrt{2}}$; $\frac{6}{\sqrt{8}}$. $\left[2\sqrt{10}; \frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

354 $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; $\frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$; $\frac{7}{2\sqrt{7}}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{3}+1}{5}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

355 $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$; $\frac{12}{\sqrt[5]{8}}$. $\left[2\sqrt[3]{2}; \frac{\sqrt[3]{36}}{3}; 6\sqrt[5]{4}\right]$

356 $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$; $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$. $[2\sqrt[3]{4}; \sqrt[5]{81}; 2\sqrt[4]{x^3}]$

357 $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{2x}{\sqrt{3x}}$; $\frac{2x}{\sqrt{xy}}$. $\left[\frac{\sqrt{x}}{x}; \frac{2}{3}\sqrt{3x}; \frac{2}{y}\sqrt{xy}\right]$

358 $\frac{ab^2}{\sqrt{abx}}$; $\frac{2x^2y}{\sqrt{x^3y}}$; $\frac{2a^3}{\sqrt{18ab}}$. $\left[\frac{b}{x}\sqrt{abx}; 2\sqrt{xy}; \frac{a^2}{3b}\sqrt{2ab}\right]$

359 $\frac{x}{3\sqrt{2x}}$; $\frac{1}{2a\sqrt{3a}}$; $\frac{\sqrt{2a+2}}{\sqrt{2ax}}$. $\left[\frac{\sqrt{2x}}{6}; \frac{\sqrt{3a}}{6a^2}; \frac{\sqrt{ax(a+1)}}{ax}\right]$

360 $\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; $\frac{a^2-4}{\sqrt{a+2}}$; $\frac{3y+9}{\sqrt{y+3}}$. $[\sqrt{x-1}; (a-2)\sqrt{a+2}; 3\sqrt{y+3}]$

361 $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{a^2+2ab+b^2}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{x-y}{\sqrt{x-y}}$. $\left[\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}; (a+b)\sqrt{a+b}; \sqrt{x-y}\right]$

362 $\frac{xy}{\sqrt[3]{xy^2}}$; $\frac{2ab}{\sqrt[5]{a^4b^2}}$; $\frac{4x^2y}{\sqrt[7]{8x^5y^2}}$. $[\sqrt[3]{x^2y}; 2\sqrt[5]{ab^3}; 2x\sqrt[7]{16x^2y^5}]$

363 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{3}{\sqrt{7}+1}$; $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$. $\left[\sqrt{2}+1; \frac{\sqrt{7}-1}{2}; \sqrt{6}+1\right]$

364 $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$; $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\frac{10}{\sqrt{3}-1}$. $[\sqrt{5}-1; \sqrt{5}+\sqrt{2}; 5(\sqrt{3}+1)]$

365 $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; $\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; $\frac{x^2-4y}{x-2\sqrt{y}}$. $\left[\sqrt{x}-\sqrt{y}; \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}; x+2\sqrt{y}\right]$

564 $\sqrt{\dfrac{y^3+4y^2+4y}{4b^3+12b^2+9b}}$; $\sqrt{\dfrac{a^4+4a^2}{4y^4+4y^2}}$.
$\left[\dfrac{|y+2|}{|2b+3|}\sqrt{\dfrac{y}{b}}; \dfrac{|a|}{2|y|}\sqrt{\dfrac{a^2+4}{y^2+1}}\right]$

Nel sito: ▶ teoria e 25 esercizi su I numeri immaginari

13. Le equazioni di secondo grado

Teoria a pag. 683

RIFLETTI SULLA TEORIA

565 VERO O FALSO?

a) La formula risolutiva di un'equazione completa di secondo grado non è valida per risolvere l'equazione $5x^2-9=0$. V F

b) Il discriminante di un'equazione spuria è positivo. V F

c) L'equazione $ax^2+bx+c=0$ ammette due soluzioni reali e coincidenti, se il primo membro è il quadrato di un binomio. V F

d) Se le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono entrambe negative, il discriminante Δ è negativo. V F

e) Si applica la formula ridotta quando il coefficiente b dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ è positivo. V F

566 TEST Mediante la formula

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+32}}{4},$$

quale delle seguenti equazioni risolvi?

A $2x^2+3x+4=0$

B $x^2-3x+32=0$

C $4x^2-3x-2=0$

D $2x^2-3x-16=0$

E $2x^2-3x-4=0$

567 Quanto vale il Δ delle equazioni $2x^2-7=0$ e $x^2+9=0$? In generale, il discriminante di un'equazione pura può essere nullo?

ESERCIZI

La fomula risolutiva

Nel sito: ▶ 9 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

568 Risolviamo le seguenti equazioni: a) $10x^2-2=x$; b) $49x^2+126x+81=0$; c) $x^2-2x+2=0$.

a) $10x^2-2=x$.

Scriviamo l'equazione in forma normale:

$10x^2-x-2=0$.

Calcoliamo il discriminante $\Delta=b^2-4ac$:

$\Delta=(-1)^2-4\cdot10\cdot(-2)=1+80=81$.

Poiché $\mathbf{\Delta>0}$, l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

Usiamo la formula risolutiva

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}:$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{81}}{2\cdot(10)}=\begin{array}{l}\dfrac{1+9}{20}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{1-9}{20}=-\dfrac{2}{5}\end{array}$$

$$x_1=\frac{1}{2}\quad \text{e}\quad x_2=-\frac{2}{5}.$$

b) $49x^2+126x+81=0$.
L'equazione è già in forma normale.

$$\Delta=(126)^2-4\cdot 49\cdot 81=15\,876-15\,876=0.$$

Poiché $\boldsymbol{\Delta=0}$, l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti.

Calcoliamo le soluzioni con la formula $x=-\frac{b}{2a}$:

$$x=\frac{-126}{2\cdot(49)}=-\frac{63}{49}=-\frac{9}{7}.$$

Le soluzioni coincidenti sono:

$$x_1=x_2=-\frac{9}{7}.$$

c) $x^2-2x+2=0$.
Scriviamo i coefficienti:

$$a=1;\quad b=-2;\quad c=2.$$

Calcoliamo il discriminante:

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot(1)\cdot(2)=-4.$$

Poiché $\boldsymbol{\Delta<0}$, l'equazione non ha radici reali.

Risolvi le seguenti equazioni.

569 $6x^2+13x+7=0$; $\quad 4x^2-8x+3=0$. $\quad \left[-1,-\frac{7}{6};\ \frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

570 $x^2-2x-3=0$; $\quad 9x^2-12x+4=0$. $\quad \left[-1, 3;\ \frac{2}{3}\text{ doppia}\right]$

571 $x^2+3x-10=0$; $\quad 12x^2+x-6=0$. $\quad \left[-5, 2;\ -\frac{3}{4},\frac{2}{3}\right]$

572 $2x^2-3x+20=0$; $\quad 6x^2+13x+8=0$. $\quad$ [impossibile; impossibile]

573 $x^2-4x-32=0$; $\quad x^2+x+\frac{2}{9}=0$. $\quad \left[-4, 8;\ -\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right]$

574 $x^2+3x-4=0$; $\quad x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}=0$. $\quad \left[-4, 1;\ \frac{5}{6}\text{ doppia}\right]$

575 $x^2-3x+2=0$; $\quad x^2-9x+33=0$. $\quad$ [1, 2; impossibile]

576 $x^2-\sqrt{2}x-4=0$; $\quad x^2-4\sqrt{3}x-36=0$. $\quad \left[-\sqrt{2}, 2\sqrt{2};\ -2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right]$

577 $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$; $\quad x^2-\sqrt{5}x+2=0$. $\quad \left[\sqrt{2}, 3\sqrt{2};\ \text{impossibile}\right]$

578 $5x^2-12x+9=0$; $\quad x^2-7x+\frac{45}{4}=0$. $\quad \left[\text{impossibile};\ \frac{5}{2},\frac{9}{2}\right]$

579 $\frac{1}{18}+\frac{3}{4}x+x^2=0$; $\quad x(x-9)=\frac{19}{4}$. $\quad \left[-\frac{1}{12},-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2},\frac{19}{2}\right]$

580 $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$; $\quad \sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$. $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ doppia; impossibile}\right]$

581 $21x^2-10x+1=0$; $\quad x^2-6x-16=0$. $\quad \left[\frac{1}{7},\frac{1}{3};\ -2, 8\right]$

582 $18x^2-21x-4=0$; $\quad 2x^2-13x-7=0$. $\quad \left[-\frac{1}{6},\frac{4}{3};\ -\frac{1}{2}, 7\right]$

583 $3x^2 = 5 + 14x$; $4x(3x+1) = 5$. $\left[-\frac{1}{3}, 5; -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right]$

584 $x(2x + 13) = 24$; $x^2 = 4(x + 3)$. $\left[-8, \frac{3}{2}; -2, 6\right]$

585 **ASSOCIA** a ogni equazione le sue soluzioni.

1. $x^2 - x - 12 = 0$ **2.** $x^2 + x - 12 = 0$ **3.** $-x^2 - 4x + 12 = 0$ **4.** $x^2 - 8x + 16 = 0$

A. $3; -4$. **B.** $4; 4$. **C.** $-3; 4$. **D.** $2; -6$.

Le equazioni incomplete

ESERCIZIO GUIDA

586 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $2x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 + 1 = 0$; c) $8x^2 - 7x = 0$; d) $64x^2 = 0$.

a) Equazione **pura**:

$$2x^2 - 1 = 0 \quad \to \quad 2x^2 = 1 \quad \to \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Estraiamo la radice quadrata:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le soluzioni sono: $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Equazione **pura**:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \to \quad x^2 = -1.$$

Non esiste un numero reale che, elevato al quadrato, dia un numero negativo, quindi l'equazione non ha radici reali.

c) Equazione **spuria**:

$$8x^2 - 7x = 0.$$

Raccogliamo x:

$$x(8x - 7) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad 8x - 7 = 0 \quad \to \quad x = \frac{7}{8}.$$

Le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{7}{8}$.

d) Equazione **monomia**:

$$64x^2 = 0 \quad \to \quad x^2 = 0 \quad \to \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

587 $2 - x^2 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$; $9x^2 = 0$. $[\pm\sqrt{2}; 0{,}6; 0 \text{ doppia}]$

588 $\frac{1}{2}x^2 = 0$; $1 - x^2 = 0$; $9x^2 - 12x = 0$. $\left[0 \text{ doppia}; \pm 1; 0, \frac{4}{3}\right]$

589 $-4x^2 = 36$; $2x^2 - \frac{8}{3}x = 0$; $4 - x^2 = 0$. $\left[\text{impossibile}; 0, \frac{4}{3}; \pm 2\right]$

590 $3x^2\sqrt{5} = 0$; $16x^2 = 1$; $-3x^2 + 6x = 0$. $\left[0 \text{ doppia}; \pm\frac{1}{4}; 0{,}2\right]$

591 $4x^2 - 2\sqrt{2} = 0$ $\left[\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right]$

592 $2x^2 + 1 = 0$ [impossibile]

593 $\sqrt{2}x^2 - 2 = 0$ $[\pm\sqrt{2}]$

594 $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}x = 0$ $[0, \sqrt{3} - \sqrt{2}]$

595 $2x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{3}x = 0$ $\left[0, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right]$

596 $(x + 7)^2 + (x - 7)^2 = 98$ [0 doppia]

597 $6x - \sqrt{3}x^2 + 3x = 0$ $[0, 3\sqrt{3}]$

598 $\sqrt{5}x^2 + x^2 - \sqrt{5}x = 0$ $\left[0, \frac{5-\sqrt{5}}{4}\right]$

599 $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ $[-6, 0]$

600 $x^2 - x = 23x - \sqrt{3}x^2$ $[0, 12(\sqrt{3}-1)]$

601 $x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$ $[0, 2\sqrt{2}]$

602 $(x+4)^2 + 1 = 8x$ [impossibile]

603 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x(2x-1) = 0$ $\left[\pm \frac{1}{2}\right]$

604 $3x^2 + 8 - 5\sqrt{2} = 0$ [impossibile]

RIEPILOGO LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvi le seguenti equazioni.

605 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$

606 $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\left[\frac{1}{2} \text{ doppia}\right]$

607 $x^2 - x + 2 = 0$ [impossibile]

608 $x^2 + 5x + 6 = 0$ $[-3; -2]$

609 $x^2 + 5x + 7 = 0$ [impossibile]

610 $x^2 - 5\sqrt{2}x + 12 = 0$ $[2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

611 $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$ $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$

612 $20x^2 - 41x + 20 = 0$ $\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$

613 $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} = 0$ $\left[-\frac{4}{5} \text{ doppia}\right]$

614 $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

615 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 6 = 0$ $[-2\sqrt{3}; -\sqrt{3}]$

616 $2x^2 - 3\sqrt{2}x - 4 = 0$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right]$

617 $x^2 = 4(x-1)$ [2 doppia]

618 $x^2 = \frac{5(x\sqrt{5}-1)}{4}$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{4}; \sqrt{5}\right]$

619 $6x^2 - 6x = 2(1-2x) - 2 - x(2-x)$ [0 doppia]

620 $2(3x-1)^2 - 3x(5x+1) = 2 - 3x$ $[0; 4]$

621 $\frac{2x}{\sqrt{3}} - x^2 - \frac{1}{3} = 0$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ doppia}\right]$

622 $(5x-1)x + (x-1)(x+1) = 0$ $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

623 $x(x+2) + 9 = 8x + 1$ $[2; 4]$

624 $(2x+1)^2 - x^2 - (x-1)^2 = (2x+3)(2x-3) + 1$ $[-1; 4]$

625 $(2-3x)(x-2) + 3(x-1)^2 = (x-1)(x+3)$ $[\pm\sqrt{2}]$

626 $(1-x)^2 = 2x + \frac{x^2 - 3x + 7}{2}$ $\left[\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right]$

627 $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x(x+2) - 5x + \frac{1}{6} = \frac{x}{3}(x-5)$ $[5 \pm 2\sqrt{6}]$

628 $(2-3x)^2 - (2x+1)^2 = 4(2-4x)$ $[\pm 1]$

629 $x - (2x-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3-x}{2} - (3x-1)(x-2)$ $\left[0; -\frac{3}{2}\right]$

630 $(3x-4)^2-3x^2=2(8+13x)$ $\left[0; \frac{25}{3}\right]$

631 $x(x+2\sqrt{2})+2\sqrt{3}x(1+\sqrt{2})=2x(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ $[0; -2\sqrt{6}]$

632 $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)-2x(x-1)=2\left(x-\frac{2}{3}\right)$ $\left[\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

633 $x(1-5x)+3=[5-(2+5x)]x-2(x+1)-(x^2-6)$ $[\pm 1]$

634 $2(x^2+2)-2(x+3)(x-3)-4=7x^2-(3x+4)^2+34$ $[0; -12]$

635 $2x(x-5)-(2x-3)(x+1)=x(2-x)-15$ $[2; 9]$

636 $(x+3)(3x-1)-2[2x^2-x(x-2)]+6=0$ $[-3; -1]$

637 $x(x-1)(x-2)-(x+2)(x^2-4)+2(x+20)=0$ $\left[-\frac{12}{5}; 4\right]$

638 $(x-3)^2+6(x+2)=(2x-1)(x+4)+37$ $[-3; -4]$

639 $(x-4)(x+8)+20=0$ $[-6; 2]$

640 $x(4-x)-(5-x)(x+5)=x(x+1)$ [impossibile]

641 $(x+3)(2x-1)-3[2x^2+x(x-6)]=13$ $\left[1; \frac{16}{7}\right]$

642 $(x+2)^3-(x-2)^3=1+(4x+1)(4x-1)$ $[\pm 2]$

643 $(x-6)(x+1)-(2-x)(x+3)=36$ $[-4; 6]$

644 $\frac{x}{2}(2x+\sqrt{3})+\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=0$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ doppia}\right]$

645 $x\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{2}{3}(3-x)+\frac{1}{3}$ $\left[2; -\frac{7}{3}\right]$

646 $2(x-1)-\frac{5}{4}x=\frac{3-5x}{4}-2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ $\left[\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

647 $\frac{(3x-1)(3x+2)}{2}-(x-4)^2+3(1+x)=\frac{-6x+10}{2}$ $\left[-\frac{38}{7}; 1\right]$

648 $\frac{2(3x+10)}{6}-x^2=\frac{3x+1}{3}$ $[\pm\sqrt{3}]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E38

649 $\frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+2x=(2x-1)(1+\sqrt{3}x)-\frac{6}{\sqrt{3}}$

ESERCIZI IN PIÙ
LE EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x.

1 $32x^5 + 243 = 0$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

2 $194\,481x^4 = 2401$ $\left[\pm\frac{1}{3}\right]$

3 $12x^4 + 28x^2 + 15 = 0$ [impossibile]

4 $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ $\left[-3;\ \frac{1}{2};\ 2\right]$

5 $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -2;\ 2\right]$

6 $(2x^2 - 4)^3 = 216$ $[\pm\sqrt{5}]$

7 $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 0$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

8 $4x^4 - 17a^2x^2 + 4a^4 = 0$ $\left[\pm 2a;\ \pm\frac{1}{2}a\right]$

9 $(3x - 1)^6 = 64$ $\left[1;\ -\frac{1}{3}\right]$

10 $\dfrac{9x^2 - 2a^2}{3x - a} + \dfrac{2a^2 - x}{3x} = \dfrac{a^3 + 3x^2 - ax}{3ax - 9x^2}$ [impossibile]

11 $\dfrac{6x^2 + 1}{x - 2} + \dfrac{x - 2}{x + 2} = \dfrac{20x^2 + 4x}{x^2 - 4}$ $\left[-1;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right]$

12 $8x^4 - 5\sqrt{3}x^2 + \dfrac{3}{2} = 0$ $\left[\pm\frac{\sqrt[4]{12}}{2};\ \pm\frac{\sqrt[4]{12}}{4}\right]$

13 $2x^3 - 3x^2 - 23x + 12 = 0$ $\left[\frac{1}{2};\ -3;\ 4\right]$

14 $\dfrac{x^2 + 9}{2x - 5} - \dfrac{3 - 4x}{2x} = \dfrac{13x^2 - 5}{4x^2 - 10x}$ $[\pm 2]$

15 $x^4 - a^2(4a^2 + 1)x^2 + 4a^6 = 0$ $[\pm a;\ \pm 2a^2]$

16 $x^4 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x^2 + \sqrt{6} = 0$ $[\pm\sqrt[4]{3};\ \pm\sqrt[4]{2}]$

17 $(8x^6 - 7a^3x^3 - 3a^6)^7 = -128a^{42}$ $\left[a;\ -\frac{1}{2}a\right]$

18 $25x^4b^2 - 625x^2b^4 - x^2 + 25b^2 = 0$ $\left[\pm 5b;\ \pm\frac{1}{5b}\right]$

19 $12x^4 + 25x^3 - 25x - 12 = 0$ $\left[-\frac{3}{4};\ -\frac{4}{3};\ \pm 1\right]$

20 $6x^4 - 49x^3 + 86x^2 - 49x + 6 = 0$ $\left[1;\ 6;\ \frac{1}{6}\right]$

21 $\sqrt{6}x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{2}x^2 + 6 = 0$ $[\pm\sqrt[4]{3};\ \pm\sqrt[4]{2}]$

22 $3x^2 - x = \dfrac{26x^3 + 1 - 3x^4}{9x^4 + 3x^3}$ $[1]$

23 $\sqrt{6}x^4 - \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{6}x^2 - 2\sqrt{2} = 0$ $\left[\pm\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}\right]$

24 $4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0$ $\left[-1;\ 4;\ \frac{1}{4}\right]$

25 $\dfrac{4x^2 - 3}{2x - 1} = \dfrac{x - 3}{2x} - \dfrac{14x^2 - 3x}{4x^2 - 2x}$ $\left[-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right]$

26 $2x^4 - \dfrac{2}{3}\sqrt{3}x^2 + x^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0$ $\left[\pm\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}\right]$

27 $\dfrac{32x^{11} + 2}{x + 1} = \dfrac{65x^5 - 3}{2x - 1} - \dfrac{32x^{11} - 7x + 65x^5}{2x^2 + x - 1}$ $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$

28 $12x^4 + 56x^3 + 89x^2 + 56x + 12 = 0$ $\left[-\frac{2}{3};\ -\frac{3}{2};\ -2;\ -\frac{1}{2}\right]$

29 $\dfrac{x^2+3x}{2x^2-3x-2}-\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{1-2x^2}{2x+1}$ [3]

30 $2\sqrt{3}x^3+7x(x-1)=2\sqrt{3}x(x-1)+2\sqrt{3}$ $\left[1;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

31 $\dfrac{3x^3-1}{x-2}-\dfrac{7x^2+2}{2x}=\dfrac{7x-26x^2-2}{4x-2x^2}$ $\left[-1;\ \dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{3}\right]$

B9. Equazioni di grado superiore al secondo - Esercizi

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

1)	$2x^3+4x^2-4x-8=0$	[$x_1=-2$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$]
2)	$a^3-3a^2-3a+9=0$	[$a_1=3$, $a_2=\sqrt{3}$, $a_3=-\sqrt{3}$]
3)	$9a+6a^3+3+2a^2=0$	[$a_1=-\frac{1}{3}$]
4)	$x^3+x^2+x+1=0$	[$x_1=-1$]
5)	$2x^3-2x+4x^2-4=0$	[$x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$]
6)	$a^3-3a^2+3a-9=0$	[$a_1=3$]
7)	$2a^4-2a-a^3+1=0$	[$a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=1$]
8)	$a^4-a^2+a^3-a=0$	[$a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$]
9)	$-2a^3-2a-2a^2-2=0$	[$a_1=-1$]
10)	$x^3-9x=0$	[$x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=3$]
11)	$x^3-4x=0$	[$x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$]
12)	$25x-x^3=0$	[$x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=-5$]
13)	$4x-9x^3=0$	[$x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$, $x_3=-\frac{2}{3}$]
14)	$2x^3-2x=0$	[$x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$]
15)	$x-x^3=0$	[$x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$]
16)	$27x-3x^3=0$	[$x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=-3$]
17)	$x^3-25x=0$	[$x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=-5$]
18)	$9+4x^4-12x^2=0$	[$x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}$]
19)	$x^4+1-2x^2=0$	[$x_1=1$, $x_2=-1$]
20)	$x^4+16+8x^2=0$	[impossibile]
21)	$\frac{1}{16}x^4+1-\frac{1}{2}x^2=0$	[$x_1=2$, $x_2=-2$]
22)	$\frac{1}{16}x^4+1+\frac{1}{4}x^2=0$	[impossibile]
23)	$9a+a^3-6a^2=0$	[$a_1=0$, $a_2=3$]
24)	$4a+25a^3-20a^2=0$	[$a_1=0$, $a_2=\frac{2}{5}$]
25)	$a^3+2a^2+a=0$	[$a_1=0$, $a_2=-1$]
26)	$12b+75b^3+60b^2=0$	[$b_1=0$, $b_2=-\frac{2}{5}$]
27)	$a^3-2a^2+a=0$	[$a_1=0$, $a_2=1$]
28)	$x^3+4x^2+4x=0$	[$x_1=0$, $x_2=-2$]
29)	$18x+24x^2+8x^3=0$	[$x_1=0$, $x_2=-\frac{3}{2}$]
30)	$2a-8a^2+8a^3=0$	[$a_1=0$, $a_2=\frac{1}{2}$]
31)	$\frac{1}{4}b^3+9b-3b^2=0$	[$b_1=0$, $b_2=6$]
32)	$a^3-3a^2+3a-1=0$	[$a_1=1$]
33)	$8+12x+6x^2+x^3=0$	[$x_1=-2$]
34)	$8a^3-12a^2+6a-1=0$	[$x_1=\frac{1}{2}$]
35)	$8a^3+12a^2+6a+1=0$	[$x_1=-\frac{1}{2}$]
36)	$a^3-6a^2+12a-8=0$	[$a_1=2$]
37)	$8x^3-36x^2+54x-27=0$	[$x_1=\frac{3}{2}$]
38)	$8x^3+12x^2+6x+1=0$	[$x_1=-\frac{1}{2}$]
39)	$\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+1=0$	[$x_1=-2$]
40)	$\frac{1}{27}x^3-\frac{1}{3}x^2+x-1=0$	[$x_1=3$]

41) $27x^3-135x^2+225x-125=0$ [$x_1=\frac{5}{3}$]

42) $8-12x+6x^2-x^3=0$ [$x_1=2$]

43) $8x^3-18x^2+27x-27=0$ [$x_1=\frac{3}{2}$]

44) $\frac{8}{27}x^3-4x^2+18x-27=0$ [$x_1=\frac{9}{2}$]

45) $\frac{8}{27}x^3+\frac{4}{3}x^2+2x+1=0$ [$x_1=-\frac{3}{2}$]

46) $1-2a+\frac{4}{3}a^2-\frac{8}{27}a^3=0$ [$a_1=\frac{3}{2}$]

47) $\frac{8}{27}-\frac{4}{3}a+2a^2-a^3=0$ [$a_1=\frac{3}{2}$]

48) $\frac{1}{8}+\frac{9}{4}a+\frac{27}{2}a^2+27a^3=0$ [$a_1=-\frac{1}{6}$]

49) $1-\frac{9}{4}a+\frac{27}{16}a^2-\frac{27}{64}a^3=0$ [$x_1=\frac{4}{3}$]

50) $a^3+2a^2-15a=0$ [$a_1=0,\ a_2=-5,\ a_3=3$]

51) $a^3+a^2-2a=0$ [$a_1=0,\ a_2=-2,\ a_3=1$]

52) $a^6-2a^4-3a^2=0$ [$a_1=0,\ a_2=\sqrt{3},\ a_3=-\sqrt{3}$]

53) $x^4+8x^3+12x^2=0$ [$x_1=0,\ x_2=-2,\ x_3=-6$]

54) $x^3-8x^2+15x=0$ [$x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=5$]

55) $x^3-5x^2-6x=0$ [$x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=6$]

56) $x^3+12x^2-28x=0$ [$x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-14$]

57) $x^3+15x^2+26x=0$ [$x_1=0,\ x_2=-2,\ x_3=-13$]

58) $x^4+x^3-12x^2=0$ [$x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=-4$]

59) $x^3+x^2-56x=0$ [$x_1=0,\ x_2=7,\ x_3=-8$]

60) $3x^4-9x^3-162x^2=0$ [$x_1=0,\ x_2=-6,\ x_3=9$]

61) $4x^3+6x^2+4x=0$ [$x_1=0$]

62) $2x^3-2x^2-84x=0$ [$x_1=0,\ x_2=-6,\ x_3=7$]

63) $x^3-2x^2-80x=0$ [$x_1=0,\ x_2=-8,\ x_3=10$]

64) $x^3+2x^2-3x=0$ [$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-3$]

65) $x^4+5x^3+6x^2=0$ [$x_1=0,\ x_2=-2,\ x_3=-3$]

66) $x^3+6x^2+11x+6=0$ [$x_1=-1\ x_2=-2,\ x_3=-3$]

67) $x^3-2x^2-5x+6=0$ [$x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3$]

68) $x^3-2x^2-9x+18=0$ [$x_1=2,\ x_2=-3,\ x_3=3$]

69) $x^3+4x^2-11x-30=0$ [$x_1=-2,\ x_2=3,\ x_3=-5$]

70) $-x^3+4x^2-x-6=0$ [$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=3$]

71) $x^3-10x^2+8x+64=0$ [$x_1=-2,\ x_2=4,\ x_3=8$]

72) $-x^3-4x^2+7x+10=0$ [$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=-5$]

73) $-x^3-3x^2+25x-21=0$ [$x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=-7$]

74) $2x^3-3x^2-3x+2=0$ [$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=\frac{1}{2}$]

75) $2x^3+17x^2+5x-24=0$ [$x_1=1,\ x_2=-8,\ x_3=-\frac{3}{2}$]

76) $4x^3-13x^2+4x+5=0$ [$x_1=1,\ x_2=\frac{9-\sqrt{161}}{8},\ x_3=\frac{9+\sqrt{161}}{8}$]

77) $9x^3-27x^2+20x-4=0$ [$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=\frac{2}{3}$]

78) $9x^3-54x^2+41x+20=0$ [$x_1=5,\ x_2=-\frac{1}{3},\ x_3=\frac{4}{3}$]

79) $9x^3-37x+28=0$ [$x_1=1,\ x_2=\frac{4}{3},\ x_3=-\frac{7}{3}$]

80) $2x^3+x^2-16x-15=0$ [$x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=-\frac{5}{2}$]

81) $2x^3-3x^2-x-2=0$ [$x_1=2$]

82) $x^3+2x^2+2x+15=0$ [$x_1=-3$]

83) $3x^3-2x^2-1=0$ [$x_1=1$]

84) $4x^3-4x^2+3x-1=0$ [$x_1=\frac{1}{2}$]

85) $-x^3+6x^2-14x+15=0$ [$x_1=3$]

86) $x^3-5x^2-3x-18=0$ [x_1=6]

87) $-3x^3+5x^2-3x+5=0$ [$x_1=\frac{5}{3}$]

88) $x^4-3x^3-7x^2+15x+18=0$ [x_1=-1, x_2=-2, x_3=3]

89) $2x^4+5x^3-4x^2-3x=0$ [x_1=0, x_2=1, $x_3=-\frac{1}{2}$, x_4=-3]

90) $x^5+3x^4-x^3-3x^2=0$ [x_1=0, x_2=1, x_3=-1, x_4=-3]

91) $3x^4-x^3-9x^2-3x+2=0$ [x_1=-1, x_2=2, $x_3=\frac{1}{3}$]

92) $2x^4-5x^3-2x^2+4x+8=0$ [x_1=2]

93) $x^4-11x^3+41x^2-61x+30=0$ [x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=5]

94) $-2x^4+11x^3-11x^2-15x+9=0$ [x_1=-1, x_2=3, $x_3=\frac{1}{2}$]

95) $8x^3+3x^2-40x-15=0$ [$x_1=-\frac{3}{8}$, $x_2=\sqrt{5}$, $x_3=-\sqrt{5}$]

96) $2x^3-x-1=0$ [x_1=1]

97) $x^4-4x^3+16x-16=0$ [x_1=-2, x_2=2]

98) $4x^4-2x^3+2x-1=0$ [$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-\sqrt[3]{4}}{2}$]

99) $x^3-7x+6=0$ [x_1=1, x_2=2, x_3=-3]

100) $8x^3-8x^2+2x=0$ [x_1=0, $x_2=\frac{1}{2}$]

101) $a^3+3a^2-4a=0$ [a_1=0, a_2=-4, a_3=1]

102) $a^4+19a^3-20a^2=0$ [a_1=0, a_2=-20, a_3=1]

103) $2x^3-7x^2+2x+3=0$ [x_1=1, x_2=3, $x_3=-\frac{1}{2}$]

104) $a^6-2a^3+1=0$ [a_1=1]

105) $x^3-5x^2+2x+8=0$ [x_1=-1, x_2=2, x_3=4]

106) $y^3-2y^2-15y=0$ [y_1=0, y_2=5, y_3=-3]

107) $a^3+8a^2-20a=0$ [a_1=0, a_2=-10, a_3=2]

108) $16a^4-2a=0$ [a_1=0, $a_2=\frac{1}{2}$]

109) $x^3+6x^2+12x+8=0$ [x_1=-2]

110) $x^3+3x^2-13x-15=0$ [x_1=-1, x_2=3, x_3=-5]

111) $10x^4-6x^3-4x^2=0$ [x_1=0, x_2=1, $x_3=-\frac{2}{5}$]

112) $x^3+3x^2-4x-12=0$ [x_1=2, x_2=-2, x_3=-3]

113) $2x-8x^3=0$ [x_1=0, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{2}$]

114) $(2x+1)^3-(2x+1)=0$ [x_1=0, x_2=-1, $x_3=-\frac{1}{2}$]

115) $(a^2-4)+(a^2-4)^2=0$ [a_1=2, a_2=-2, $a_3=\sqrt{3}$, $a_4=-\sqrt{3}$]

116) $a^6-12a^4+48a^2-64=0$ [a_1=-2, a_2=2]

117) $a^4-2a^2+1=0$ [a_1=1, a_2=-1]

118) $4a^4-16a^2=0$ [a_1=0, a_2=2, a_3=-2]

119) $2x^3-2x+4x^2-4=0$ [x_1=1, x_2=-1, x_3=-2]

120) $2a^4-2a-a^3+1=0$ [a_1=1, $a_2=\frac{1}{2}$]

121) $a^4-a^2+a^3-a=0$ [a_1=0, a_2=1, a_3=-1]

BINOMIE

122) $x^4-9=0$ [$x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$]

123) $9a^4-1=0$ [$a_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$]

124) $25a^8-\frac{9}{4}=0$ [$a_1=\frac{\sqrt[4]{3000}}{10}$, $a_2=-\frac{\sqrt[4]{3000}}{10}$]

125) $2x^4+1=0$ [impossibile]

126) $2x^4-1=0$ [$x_1=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$]

127) $x^4+16=0$ [impossibile]

128) $x^4 - 16 = 0$ [x_1=2, x_2=-2]

129) $a^3 - 1 = 0$ [a_1=1]

130) $a^6 - 1 = 0$ [a_1=1, a_2=-1]

131) $a^6 - 27 = 0$ [$a_1=\sqrt{3}$, a_2=- $\sqrt{3}$]

132) $a^9 + 8 = 0$ [$a_1= -\sqrt[3]{2}$]

133) $8 - b^3 = 0$ [b_1=2]

134) $27 + x^3 = 0$ [x_1=-3]

135) $a^3 + 1 = 0$ [a_1=-1]

136) $8x^3 + 1 = 0$ [$x_1= -\frac{1}{2}$]

137) $27x^3 - 8 = 0$ [$x_1= \frac{2}{3}$]

138) $a^3 + 8 = 0$ [a_1=-2]

139) $a^3 - 8 = 0$ [a_1=2]

140) $b^3 - 27 = 0$ [b_1=3]

141) $b^3 + 27 = 0$ [b_1=-3]

142) $64 - a^6 = 0$ [a_1=-2, a_2=2]

143) $64 + b^6 = 0$ [impossibile]

144) $\frac{8}{27}a^3 - 1 = 0$ [$a_1= \frac{3}{2}$]

145) $\frac{27}{8} + a^3 = 0$ [$a_1= -\frac{3}{2}$]

146) $100 - x^4 = 0$ [$x_1= \sqrt{10}$, x_2=- $\sqrt{10}$]

147) $3a^3$-24=0 [a_1=2]

148) $3a^4 - 3 = 0$ [a_1=1, a_2=-1]

149) x^3+1=0 [x_1=-1]

150) x^3-1=0 [x_1=1]

151) 1-x^3=0 [x_1=1]

152) 8-8x^3=0 [x_1=1]

153) 8-x^3=0 [x_1=2]

154) $x^4 - 9 = 0$ [$x_1= \sqrt{3}$, x_2=- $\sqrt{3}$]

155) $9a^4 - 1 = 0$ [$a_1= \frac{\sqrt{3}}{3}$, a_2=- $\frac{\sqrt{3}}{3}$]

156) $a^6 - 27 = 0$ [$a_1= \sqrt{3}$, a_2=- $\sqrt{3}$]

157) $64 - a^6 = 0$ [a_1=-2, a_2=-2]

TRINOMIE

158) $a^4 - 12a^2 + 11 = 0$ [a_1=1, a_2=-1, $a_3= \sqrt{11}$, a_4=- $\sqrt{11}$]

159) $a^4 - 6a^2 - 7 = 0$ [$a_1= \sqrt{7}$, a_2=- $\sqrt{7}$]

160) $x^4 + 7x^2 - 30 = 0$ [$x_1= \sqrt{3}$, x_2=- $\sqrt{3}$]

161) $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$ [$x_1= \sqrt{2}$, x_2=- $\sqrt{2}$]

162) $a^4 - 9a^2 - 36 = 0$ [$a_1= 2\sqrt{3}$, a_2=- $2\sqrt{3}$]

163) $a^4 - 15a^2 + 36 = 0$ [$a_1= 2\sqrt{3}$, a_2=- $2\sqrt{3}$, $a_3= \sqrt{3}$, a_4=- $\sqrt{3}$]

164) $a^4 + 15a^2 + 36 = 0$ [impossibile]

165) $a^4 + 9a^2 - 36 = 0$ [$a_1= \sqrt{3}$, a_2=- $\sqrt{3}$]

166) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ [x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2]

167) $64 + 16a^3 + a^6 = 0$ [a_1=-2]

168) $x^4 + 1 - 2x^2 = 0$ [x_1=1, x_2=-1]

169) $a^6 - 2a^4 - 3a^2 = 0$ [a_1=0, $a_2= \sqrt{3}$, a_3=- $\sqrt{3}$]

170) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ [x_1=1, x_2=-1, x_3=3, x_4=-3]

171) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ [x_1=3, x_2=-3, x_3=2, x_4=-2]

172) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ [x_1=1, x_2=-1, x_3=5, x_4=-5]

173) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ [x_1=4, x_2=-4, x_3=2, x_4=-2]

174) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ [x_1=1, x_2=-1, $x_3= \frac{1}{2}$, $x_4= -\frac{1}{2}$]

175) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ [$x_1= \frac{1}{2}$, $x_2= -\frac{1}{2}$, x_3=2, x_4=-2]

176) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ — [$x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=-\frac{1}{3}$]

177) $36x^4 - 25x^2 + 4 = 0$ — [$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{2}{3}$, $x_4=-\frac{2}{3}$]

178) $36x^4 - 97x^2 + 36 = 0$ — [$x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=\frac{2}{3}$, $x_4=-\frac{2}{3}$]

179) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ — [$x_1=1$, $x_2=-1$]

180) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ — [$x_1=3$, $x_2=-3$]

181) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ — [$x_1=2$, $x_2=-2$]

182) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ — [$x_1=5$, $x_2=-5$]

183) $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$ — [$x_1=2$, $x_2=-2$]

184) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ — [$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$]

185) $4x^4 - 15x^2 - 4 = 0$ — [$x_1=2$, $x_2=-2$]

186) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$ — [$x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$]

187) $36x^4 + 65x^2 - 36 = 0$ — [$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{2}{3}$]

188) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ — [impossibile]

189) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ — [impossibile]

190) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ — [impossibile]

191) $x^4 + 26x^2 + 25 = 0$ — [impossibile]

192) $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$ — [impossibile]

193) $4x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ — [impossibile]

194) $4x^4 + 17x^2 + 4 = 0$ — [impossibile]

195) $9x^4 + 10x^2 + 1 = 0$ — [impossibile]

196) $36x^4 + 25x^2 + 364 = 0$ — [impossibile]

197) $36x^4 + 97x^2 + 36 = 0$ — [impossibile]

198) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ — [$x_1=1$, $x_2=2$]

199) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ — [$x_1=-1$, $x_2=2$]

200) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ — [$x_1=1$, $x_2=-2$]

201) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$ — [$x_1=-2$, $x_2=-1$]

202) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ — [$x_1=1$, $x_2=3$]

203) $x^6 + 28x^3 + 27 = 0$ — [$x_1=-3$, $x_2=-1$]

204) $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$ — [$x_1=1$, $x_2=-3$]

205) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ — [$x_1=3$, $x_2=-1$]

206) $8x^6 - 65x^3 + 8 = 0$ — [$x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$]

207) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$ — [$x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{2}$]

208) $8x^6 + 63x^3 - 8 = 0$ — [$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$]

209) $8x^6 + 65x^3 + 8 = 0$ — [$x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$]

210) $27x^6 - 224x^3 + 64 = 0$ — [$x_1=2$, $x_2=\frac{2}{3}$]

211) $27x^6 - 721x^3 - 216 = 0$ — [$x_1=3$, $x_2=-\frac{2}{3}$]

212) $8x^6 - 35x^3 + 27 = 0\ 0$ — [$x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$]

213) $8x^6 + 37x^3 - 216 = 0$ — [$x_1=-2$, $x_2=\frac{3}{2}$]

214) $x^6 - 117x^3 - 1000 = 0$ — [$x_1=5$, $x_2=-2$]

215) $x^6 - 37x^3 - 1728 = 0$ — [$x_1=4$, $x_2=-3$]

216) $x^6 - 91x^3 + 1728 = 0$ — [$x_1=3$, $x_2=4$]

217) $x^6 + 152x^3 + 3375 = 0$ — [$x_1=-3$, $x_2=-5$]

218) $729x^6 + 189x^3 - 8 = 0$ — [$x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{2}{3}$]

219) $64x^6 + 208x^3 - 27 = 0$ — [$x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$]

220) $512x^6 - 152x^3 - 27 = 0$ — [$x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{4}$]

221) $216x^6 - 721x^3 - 27 = 0$ $[x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{3}{2}]$

Sistemi di equazioni di secondo grado in due incognite

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

ricavo la y nella seconda equazione (perché di 1° grado)

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11 \\ -y = -2x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

sostituisco il valore nella prima equazione (di 2° grado) bloccando l'altra

$$\begin{cases} x^2 + x \cdot (2x - 4) - (2x - 4)^2 = 11 \\ * \end{cases}$$

eseguo i calcoli ottenendo, così, una equazione di 2°grado a una incognita

$$\begin{cases} x^2 + 2x^2 - 4x - (4x^2 + 16 - 16x) = 11 \\ * \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x^2 - 4x - 4x^2 - 16 + 16x - 11 = 0 \\ * \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - 27 = 0 \\ * \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 12x + 27 = 0 \\ * \end{cases}$$

risolvo l'equazione di 2° grado

$$\begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{+12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \dfrac{+12 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{+12 \pm 6}{2} \rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = 9 \\ * \end{cases}$$

sostituisco tali valori di x nell'equazione di 1° grado, ottenendo i corrispondenti valori di y

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \cdot (3) - 4 = 6 - 4 = 2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 2 \cdot (9) - 4 = 18 - 4 = 14 \end{cases}$$

Le coppie di valori $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 14 \end{cases}$ sono le soluzioni del mio sistema.

<u>ESERCIZI</u>

1) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x^2+y^2-3x+1=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}\right]$

2) $\begin{cases} x^2+2x-4y+4=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}; \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}\right]$

3) $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+y^2+6x+8y-11=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=-10 \end{cases}\right]$

4) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+y^2-3xy=4 \end{cases}$ $[impossibile]$

5) $\begin{cases} (x-5)(x-7)=(2+y)(6-y) \\ \frac{1}{3}x-\frac{y+1}{2}=\frac{4}{3} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=10 \\ y=3 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{46}{13} \\ y=-\frac{17}{13} \end{cases}\right]$

6) $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2-(y^2+16)=16 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}\right]$

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=7 \end{cases}$ sol impossibile

3) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=4 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-10 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1+\sqrt{11} \\ y=1-\sqrt{11} \end{cases}$; $\begin{cases} x=1-\sqrt{11} \\ y=1+\sqrt{11} \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=10 \end{cases}$ sol impossibile

11) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{7}{2} \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-\frac{1}{3} \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1+\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=1-\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=1-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=1+\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-50 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2+3\sqrt{6} \\ y=2-3\sqrt{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x=2-3\sqrt{6} \\ y=2+3\sqrt{6} \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2-4y^2-x=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2+2y^2-6=0 \\ x=y \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2-6xy=x \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{1}{4} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x^2-y^2+4y-2x+2=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy-x^2+2y^2=y-2x \\ x+y=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2+2xy+y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases}$ sol ; $\begin{cases} x=1+\frac{2\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-\frac{2\sqrt{10}}{5} \\ y=-\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-x-10=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+3y=10 \end{cases}$ sol impossibile

1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2+x+y=1 \end{cases}$ sol impossibile

5) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2-4x-4y=5 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2+3xy=5 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy=12 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+2y=-2 \\ 4x^2+4y^2=52 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4} \\ 3x^2+3y^2=\dfrac{15}{4} \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-3xy=4 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+y=-7 \\ x^2+y^2-6xy-3x-3y=44 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{13}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{13}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x+y=6 \end{cases}$ sol impossibile

13) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=3 \end{cases}$ sol impossibile

14) $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x+y=6 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ y=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ y=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ xy=-3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases}$;
$\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^2+y^2-4xy-6x-6y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

18) $\begin{cases} x^2+y^2-6xy+3x+3y=2 \\ xy=2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3+\sqrt{7} \\ y=-3-\sqrt{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3-\sqrt{7} \\ y=-3+\sqrt{7} \end{cases}$